**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Карачаево-Черкесский государственный
университет имени У.Д. Алиева**

Ф. Х. Асхакова

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И БАЛАНСОВЫЕ МОДЕЛИ

Карачаевск, 2016

УДК 330.4(075.8)
ББК 65в6я73

Ф.Х. Асхакова. Экономико-математические методы и балансовые модели / Ф. Х. Асхакова. – Карачаекск, 2016 - 124 с.

ISBN

В пособии приведены теоретические основы и практические аспекты методик построения неотрицательных решений моделей Леонтьева, Леонтьева-Форда, обобщенной модели Леонтьева-Форда на основе численных методов. Рассмотрены различные технологии исследования оптимизационных задач в рамках разных балансовых моделей. Теоретические положения, приведенные в пособии, сопровождаются заданиями практического характера. Приведен контрольный материал, необходимый для определения уровня усвоения студентами содержания пособия.

Содержание пособия охватывает базовые вопросы рабочих программ дисциплин «Моделирование экономических процессов» и «Экономико-математические методы и модели» основной образовательной программы направления подготовки 09.03.03 «Прикладная информатика» (профиль "Прикладная информатика в экономике") и адресовано как студентам, так и специалистам, интересующимся вопросами экономико-математических методов и моделей.

Рецензенты:
д. ф.-м.н., профессор А.М. Кочкаров,
д. ф.-м.н., профессор Б.И. Урусова

ISBN

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

С начала 19 века в экономической теории возникло целое направление, занимающееся исследованием равновесия экономических факторов. Традиционно различают статическое и динамическое равновесия. Под статическим равновесием понимают баланс всех экономических факторов в фиксированный момент времени, предполагая, что этот баланс сохраняется на некотором интервале времени. Под динамическим равновесием понимают баланс всех факторов в каждый момент времени из рассматриваемого временного интервала.

Среди всех балансов одним из важнейших является межотраслевой народнохозяйственный баланс. Для его построения используется балансовый метод – метод взаимного сопоставления материальных, трудовых, финансовых ресурсов и потребностей в них на производстве, в обществе. Первые народнохозяйственные межотраслевые балансы были разработаны в нашей стране в 20-е годы под руководством академика Баренгольца М.И.

Впервые математический аппарат для анализа таких балансов стал применять лауреат Нобелевской премии американский ученый В. Леонтьев. Им была разработана экономико-математическая модель межотраслевого баланса. С её помощью он в 30-50 годы 20 века провел тщательный анализ американской экономики. Полученные им результаты помогли экономистам США избежать многих ошибочных решений и прогнозов в экономике.

Различают два вида балансовых моделей Леонтьева: замкнутую и открытую.

Замкнутая балансовая модель Леонтьева – это система линейных алгебраических уравнений, каждое из которых выражает требование баланса между производимой отраслями (рассматриваемой экономической системы) валовой продукцией и совокупной потребностью на неё с учетом технологических затрат. В отличие от замкнутой модели Леонтьева, открытая модель позволяет учесть не только технологические затраты производства, но и экспорт-импорт продукции.

Модель Леонтьева непрерывно совершенствуется и обобщается. Появилась модель Леонтьева-Форда, позволяющая учитывать не только экономические, но и экологические факторы, возникающие в процессе промышленного производства. В последнее время появились экономико-математические модели, учитывающие утилизацию вредных отходов производства. Модели Леонтьева, Леонтьева-Форда являются статическими моделями. Они были построены в предположении (допущении) того, что на заданном временном интервале производственные показатели остаются неизменными. В настоящее время разработана и используется на практике динамическая балансовая модель Леонтьева, в которой эти показатели уже рассматриваются в динамике их развития (т.е. с течением времени). Для построения этой модели привлекается аппарат теории дифференциальных уравнений.

В последнее время разрабатываются балансовые экономико-математические модели, учитывающие значительное число отраслей в экономике (сотни и тысячи). Для построения таких моделей используется аппарат теории интегральных уравнений, функционального анализа (Воронежская экономико-математическая школа).

Исследованию экономико-математических моделей межотраслевого баланса посвящены работы многих российских и зарубежных исследователей. Будущим экономистам полезно знать, что несмотря на большое число публикаций, посвященных балансовым моделям экономики, недостаточно разработанными остаются два вопроса: построение неотрицательных решений продуктивных экономико-математических балансовых моделей и постановка и исследование оптимизационных задач в рамках этих моделей.

Модели Леонтьева, Леонтьева-Форда, имеющие неотрицательные решения, называют продуктивными. Существует несколько признаков (достаточных, необходимых и достаточных), позволяющих определить продуктивность рассматриваемой модели. Но эти признаки позволяют показать только продуктивность, но не способ построения решения модели. Формально, выяснив продуктивность модели, можно найти её решение известными «точными» методами (Гаусса, Крамера, матричным способом). Но хорошо известно, что при большом числе уравнений в системе линейных алгебраических уравнений «точные» методы страдают рядом существенных недостатков, от которых избавлены в значительной степени приближенные методы: «точные» методы громоздки при их реализации на ЭВМ, требуют при построении решения значительного числа арифметических операций, в результате их выполнения накапливается вычислительные погрешности (часто значительные).

Теоретический материал, приводимый в учебном пособии, направлен на решение следующей комплексной научной задачи: провести подробный анализ балансовых моделей с помощью последних достижений в области численных методов и методов оптимизации (разработать эффективный алгоритм построения численными методами неотрицательных решений продуктивных балансовых моделей Леонтьева, Леонтьева-Форда, разработать методику построения численными методами устойчивых неотрицательных решений продуктивных балансовых моделей Леонтьева, Леонтьева-Форда, Леонтьева-Форда, учитывающей утилизацию вредных отходов, в случае неустойчивости этих моделей к погрешностям вычислений (в случае, когда эти модели являются плохо обусловленными), исследовать оптимизационные задачи, возникающие в рамках этих моделей, реализовать полученные результаты на ЭВМ).

Учебное пособие состоит из четырех глав.

В главе I описаны экономико-математические балансовые модели (Леонтьева, Леонтьева-Форда, Леонтьева-Форда, учитывающая утилизацию вредных отходов), которые использованы в проводившихся исследованиях, результаты которых приведены во второй-четвертой главах. Приведены критерии продуктивности (существования неотрицательного решения) этих моделей. Приведены основные сведения из математического программирования, линейной алгебры, описаны инструментальные средства, используемые в последующих главах.

Во второй главе изучается использование экономико-математических балансовых моделей для анализа балансовых моделей хозяйствующих субъектов Карачаево-Черкесской Республики.

В третьей главе приводятся методики построения неотрицательных решений балансовых моделей: экономико-математических балансовых моделей Леонтьева, Леонтьева-

Форда и Леонтьева-Форда, учитывающей утилизацию вредных отходов; некорректно поставленных балансовых моделей (Леонтьева, Леонтьева-Форда, Леонтьева-Форда, учитывающей утилизацию вредных отходов) методом регуляризации (по Тихонову). Эти методики реализованы в программные продукты. Приводятся примеры их использования.

В четвёртой главе приведены результаты исследования оптимизационных задач в рамках экономико-математических балансовых моделей Леонтьева; Леонтьева-Форда; Леонтьева-Форда, учитывающей утилизацию вредных отходов производства. Описаны методы решения оптимизационных задач в рамках рассматриваемых балансовых моделей. Приведены примеры.

ГЛАВА I. БАЛАНСОВЫЕ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ИХ АНАЛИЗА

1.1 Балансовые модели

1.1.1 Модель Леонтьева

Балансовые модели в экономике широко используются при моделировании экономических процессов, протекающих на разных региональных уровнях: от конкретного предприятия до государства или совокупности нескольких государств, объединенных в экономический союз.

Под балансовой моделью понимается система уравнений (алгебраических, дифференциальных), каждое из которых устанавливает баланс между совокупным количеством продукции, производимой отдельными секторами экономики и совокупной потребностью общества (или его части) в данной продукции [30]. В балансовой экономико-математической модели могут специально учитываться (в зависимости от рассматриваемой конкретной задачи) требования соответствия наличия рабочей силы и количества рабочих мест, спроса населения и предложения товаропроизводителей на конкретные виды продукции и т.д.

Подобные модели начал изучать с 1931 года известный американский экономист русского происхождения В.В. Леонтьев [18, 19].

Понятие «отрасль» в этих моделях условное. Под «отраслью» будем понимать некоторую эмпирическую совокупность экономических объектов, объединенных на основе некоторой классификации рассматриваемых объектов и занятых выпуском определенного вида продукции [25]. Примерами отраслей являются машиностроительная, авиационная, сельско-хозяйственная, домашнее хозяйство [19] и т.д. (отрасль «домашнее хозяйство» представляет собой совокупность из одного или нескольких лиц с общим доходом, который расходуется на покупку и потребление товаров и услуг) [8].

Информационное обеспечение балансовой модели осуществляется с помощью так называемой технологической матрицы. Технологическая матрица – числовая таблица, элементами которой являются коэффициенты (нормативы) прямых затрат на производство единицы продукции в натуральном выражении [40]. Однако по многим причинам получение статистических данных у хозяйствующих субъектов при построении технологической матрицы затруднительно. Поэтому при построении математической модели межотраслевого баланса используется такое понятие, как чистая (технологическая) отрасль. Чистой отраслью называется условная отрасль экономики, объединяющая производственные объекты, производящие данный продукт независимо от их ведомственной (административной) подчиненности. Переход от хозяйственных к чистым отраслям требует специального преобразования данных, полученных реальных объектов и перехода к новым единицам измерения элементов баланса [39].

Далее всюду будем предполагать выполнимыми следующие условия:

1. Каждая отрасль производит один и только один продукт, так что отрасли могут быть перенумерованы числами, совпадающими с номерами выпускаемых ими продуктов.

2. В процессе производства продукта в каждой отрасли из n отраслей используются (не исключается, что в нулевых количествах) продукты других и, возможно, этой же отрасли.

3. Количество используемого в j-ой отрасли продукта i-ой отрасли прямо пропорционально объему выпуска продукции j-ой отрасли, затрачиваемого на выпуск одной единицы продукции i-той отрасли.

Общая схема межотраслевого баланса приведена в таблице 1 [30, 39, 25, 12, 15, 6].

Квадрант I в таблице 1 – таблица межотраслевых материальных затрат. Здесь $x_{ij}, i, j = 1, \ldots, n$, – объем (величина) или стоимость продукта, произведенного в i-ой отрасли и используемой в отрасли j.

Таблица 1 – Принципиальная схема межотраслевого баланса (МОБ) в стоимостном выражении

Производящие отрасли	Потребляющие					Конечный продукт	Валовой продукт
	1	2	3	…	n		
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	…	x_{1n}	f_1	x_1
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	…	x_{2n}	f_2	x_2
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	…	x_{3n}	f_3	x_3
…	…	…	…	I	…	…	…
…	…	…	…	…	…	II	…
…	…	…	…	…	…	…	…
n	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}		x_{nn}	f_n	x_n
Амортизация	c_1	c_2	c_3	…	c_n		
Оплата труда	v_1	v_2	v_3	Ш	v_n	IV	
Чистый доход	m_1	m_2	m_3	…	m_n		
Валовой продукт	x_1	x_2	x_3	…	x_n		$\sum_{i-1}^{n} x_i = \sum_{j-1}^{n} x_j$

В квадранте II приведена (представлена) конечная продукция всех отраслей, выходящая из производственной сферы в сферу конечного потребления и накопления.

В квадранте III представлен национальный доход, представляющий собой сумму, отражающую чистый доход и сумму, идущую на амортизацию и оплату труда.

Квадрант IV отражает конечное распределение и использование национального продукта. Общий итог, отражаемый в этом квадранте, равен созданному за рассматриваемый интервал времени национальному доходу.

Величины, отраженные в таблице 1, связаны соотношениями:

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + c_j + v_j + m_j\,,\ \ j = 1, 2, \ldots, n; \qquad (1.1.1.1)$$

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + f_j\,,\ \ i = 1, 2, \ldots, n\,. \qquad (1.1.1.2)$$

Пусть экономическая система имеет n взаимосвязанных отраслей, каждая из которых производит свой продукт. Тогда объем выпуска i-й отрасли, используемого j-й отраслью при производстве единицы его совокупного выпуска:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n), \qquad (1.1.1.3)$$

где a_{ij} – коэффициент затрат продукта i-й отрасли в j-й отрасли – так называемый технологический коэффициент, x_i – валовый выпуск продукции i-й отрасли за данный промежуток времени, x_{ij} – количество продукции i-й отрасли, расходуемый j-й отраслью для обеспечения выпуска ее продукции в объеме x_{ij}.

Обозначим через $x_i^{'}$ – валовый выпуск продукции i-й отрасли за истекший промежуток времени; $x_{ij}^{'}$ – количество продукции i-й отрасли, расходуемый j-й отраслью для обеспечения выпуска ее продукции в размере x_{ij} этот же промежуток времени.

$$\frac{x_{ij}^{'}}{x_j^{'}} = \frac{x_{ij}}{x_j} = a_{ij} = const. \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.1.1.4}$$

Постоянство коэффициента затрат в уравнении (1.1.1.4) за некоторый промежуток времени, затрагивающее как истекшее время, так и текущее, обуславливается примерным постоянством используемой технологии.

Отсюда, затраты продукта i-й отрасли в j-й отрасли, прямо пропорциональны количеству (объему) производимой продукции, т.е.

$$x_{ij} = a_{ij}\, x_j\,, \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.1.1.5}$$

Из уравнения (1.1.1.2) баланс между совокупным выпуском и суммарными затратами продукции каждой отрасли может быть описан следующей системой уравнений [4]:

$$\begin{cases} (x_1 - x_{11}) - x_{12} - \ldots - x_{1n} = f_1, \\ x_{21} + (x_2 - x_{22}) - \ldots - x_{2n} = f_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{n1} - x_{n2} - \ldots + (x_n - x_{nn}) = f_n, \end{cases} \tag{1.1.1.6}$$

где f_i – количество продукции i-й отрасли или конечный продукт, предназначенный к потреблению в непроизводственной сфере, чистый выпуск продукта.

Подставляя уравнение (1.1.1.3) в уравнение (1.1.1.6), получим линейную балансовую модель

$$\begin{cases} (1 - a_{11})\, x_1 - a_{12}\, x_2 - \ldots - a_{1n}\, x_n = f_1, \\ a_{21}\, x_1 + (1 - a_{22})\, x_2 - \ldots - a_{2n}\, x_n = f_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ -a_{n1}\, x_1 - a_{n2}\, x_2 - \ldots + (1 - a_{nn})\, x_n = f_n, \end{cases} \tag{1.1.1.7}$$

где x_i – валовой продукт i-й отрасли, a_{ij} – количество единиц i-й отрасли, идущих на производство единицы продукции j-й отрасли, f – вектор чистого выпуска $(i = 1, 2, ..., n)$.

Обозначим

$$\begin{pmatrix} (1-a_{11}) & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & (1-a_{22}) & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & (1-a_{nn}) \end{pmatrix} = (I - A), \quad (1.1.1.8)$$

где $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ – матрица затрат.} \quad (1.1.1.9)$$

При этом все элементы матрицы A должны быть положительными.

Систему (1.1.1.7) можно представить в матрично-векторной форме:

$$(I - A)x = f\,. \quad (1.1.1.10)$$

Если вектор $f = col(f_1, f_2, f_3, \dots, f_n) > 0$ предполагать заданным, то можно определить вектор $x = col(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$(обозначение $col(x_1, x_2, \dots x_n)$ здесь и далее означает вектор-столбец элементов $x_1, x_2, ... x_n$). Если существует $(I - A)^{-1}$, то (1.1.1.10) можно записать в следующем виде:

$$x = (I - A)^{-1} f\,. \quad (1.1.1.11)$$

Матрица $(I - A)^{-1}$ существует и неотрицательна, если определитель матрицы $(I - A)$ и все её главные миноры положительны (условие Хокинса-Саймана) [22, 15]:

$$1 - a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1-a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & 1-a_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots$$

$$\ldots,\quad \begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & -a_{23} & \ldots & -a_{2n} \\ -a_{31} & -a_{32} & 1-a_{33} & \ldots & -a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \ldots & 1-a_{nn} \end{vmatrix} > 0. \qquad (1.1.1.12)$$

Если это условие выполняется для одной произвольно пронумерованной последовательности секторов, то оно необходимо выполняется также и для любой другой последовательности. Материальная интерпретация этого условия состоит в том, что если экономическая система, в которой каждый сектор функционирует, непосредственно или косвенно потребляя продукцию других секторов, способна не только обеспечивать саму себя, но и осуществлять положительные поставки при конечном спросе, то и любая из ее подсистем должна быть способна осуществлять то же самое. Если хотя бы одна из подсистем не может удовлетворить этому тесту, она неизбежно вызывает утечку, которая нарушит способность самоподдержки всей системы [2].

Необходимое и достаточное условие способности к самоподдержке экономики состоит в том, чтобы сумма элементов каждого столбца структурной матрицы была не больше единицы и, по крайней мере, одна из столбцовых сумм была строго меньше единицы.

Систему (1.1.1.7) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{cases} x_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n = f_1, \\ -a_{21}x_1 + x_2 - a_{22}x_2 - \ldots - a_{2n}x_n = f_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots + x_n - a_{nn}x_n = f_n, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n) = f_1, \\ x_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n) = f_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n - (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n) = f_n. \end{cases} \qquad (1.1.1.13)$$

Отсюда, приходим к классической модели Леонтьева

$$x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = f_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (1.1.1.14)$$

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j + f_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (1.1.1.15)$$

или

$$x = Ax + f\,, \qquad (1.1.1.16)$$

где $x \in R_+^n$ – вектор валового выпуска продукта, называемого полезным; $R_+^n = \{col(x_1, \ldots, x_n):\ \ x_i \in [0, \infty),\ \ i = 1, 2, \ldots, n\}$; $f \in R_+^n$ – заданный неотрицательный вектор, характеризующий объем выпуска полезного продукта; A – технологическая матрица размера $n \times n$ с неотрицательными элементами. Здесь $x = col(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где x_j – объемы (расчетные) выпуска продукции j-й отрасли в системе, состоящей из отраслей.

Кроме указанных выше трех условий при построении модели межотраслевого баланса всегда предполагается выполненным четвертое условие:

4) элементы матрицы затрат A и вектора чистого дохода f с течением времени не меняются, т.е. модель (1.1.1.7) или (1.1.1.15) является статичной.

Данный факт подтверждается при рассмотрении конкретных экономических задач. Он впервые был замечен В. Леонтьевым и всегда учитывается при построении балансовых моделей. Он указывает на то, что балансовые модели разрабатываются только на конкретные периоды развития экономики и в рамках каждой такой модели не устанавливается связь между этими периодами.

Модель Леонтьева, в которой рассматриваются замкнутые экономические системы, т.е. системы, в которых используются все то, что производится внутри этой системы, принято называть замкнутой моделью Леонтьева. Модель Леонтьева, в которой рассматриваются экономические системы, в которых учитываются импорт и экспорт товаров, принято называть открытой моделью Леонтьева.

Обратим внимание [3], что модель (1.1.1.14) является частным случаем (при $\rho = 1$) модели Леонтьева

$$\rho\, x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{i\,j}\, x_j = f_i\,,\ (i = 1, 2, 3, \ldots, n), \qquad (1.1.1.17)$$

где ρ – некоторый числовой параметр.

1.1.2 Модель Леонтьева-Форда

В модели (1.1.13) не учитывается производственные отходы отраслей, а также затраты этих же отраслей на ликвидацию вредных отходов, количество вторичных отходов. Учитывая количество вредных отходов, выбрасываемых в окружающую среду отраслями в процессе производства валового продукта, и коэффициенты, характеризующие объем вредных отходов по каждому виду загрязнителей в расчете на единицу валового выпуска продукции каждой отрасли, получим:

$$\begin{cases} x_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n = f_1, \\ x_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \ldots - a_{2n}x_n = f_{2,} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots - a_{nn}x_n = f_n, \\ x_{n+1} - a_{n+1\,1}x_1 - a_{n+1\,2}x_2 - \ldots - a_{n+1\,n}x_n = 0, \\ x_{n+2} - a_{n+2\,1}x_1 - a_{n+2\,2}x_2 - \ldots - a_{n+2\,n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_k - a_{k1}x_1 - a_{k2}x_2 - \ldots - a_{kn}x_n = 0, \end{cases} \qquad (1.1.2.1)$$

где $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_k$ – количество вредных отходов, получаемых при выпуске полезного продукта; $\begin{pmatrix} a_{n+1\,1} & a_{n+1\,2} & \cdots & a_{n+1\,n} \\ a_{n+2\,1} & a_{n+2\,2} & \cdots & a_{n+2\,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}$ – коэффициенты, характеризующие объем вредных отходов по каждому виду загрязнителей в расчете на единицу валового выпуска продукции каждой отрасли.

Каждая отрасль тратит часть своего полезного продукта для ликвидации вредных отходов. В процессе уничтожения вредных отходов в природе остается некоторое их количество. С учетом этих факторов систему (1.1.2.1) можно представить в виде:

$$\begin{cases} x_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n - a_{1\,n+1}x_{n+1} - \ldots - a_{1\,k}x_k = f_1, \\ x_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \ldots - a_{2n}x_n - a_{2\,n+1}x_{n+1} - \ldots - a_{2\,k}x_k = f_{2,} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots - a_{nn}x_n - a_{n\,n+1}x_{n+1} - \ldots - a_{n\,k}x_k = f_k, \\ -x_{n+1} + a_{n+1\,1}x_1 + a_{n+1\,2}x_2 + \ldots + a_{n+1\,n}x_n + a_{n+1\,n+1}x_{n+1} + \ldots + a_{n+1\,k}x_k = f_{n+1}, \\ -x_{n+2} + a_{n+2\,1}x_1 + a_{n+2\,2}x_2 + \ldots + a_{n+2\,n}x_n + a_{n+2\,n+1}x_{n+1} + \ldots + a_{n+2\,k}x_k = f_{n+2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ -x_k + a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n + a_{k\,n+1}x_{n+1} + \ldots + a_{k\,k}x_k = f_k, \end{cases} \qquad (1.1.2.2)$$

где $\begin{pmatrix} a_{1\,n+1} & a_{1\,n+2} & \cdots & a_{1k} \\ a_{2\,n+1} & a_{2\,n+2} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n\,n+1} & a_{n\,n+2} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix}$ – коэффициенты, характеризующие затраты при уничтожении вредных отходов;

$\begin{pmatrix} a_{n+1\,n+1} & a_{n+1\,n+2} & \cdots & a_{n+1\,k} \\ a_{n+2\,n+1} & a_{n+2\,n+2} & \cdots & a_{n+2\,k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k\,n+1} & a_{k\;\;n+2} & \cdots & a_{k\,k} \end{pmatrix}$ – коэффициенты, характеризующие объемы вновь получаемых вредных веществ при уничтожении старых;

$f_{n+1}, f_{n+2}, f_{n+3}, \ldots, f_k$ – количество вредных отходов, остающихся в природе после переработки вредных отходов.

Обозначим

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1\,2} & \cdots & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \cdots & a_{2\,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n\,1} & a_{n\,2} & \cdots & a_{n\,n} \end{pmatrix}, \qquad (1.1.2.3)$$

$$A_{1\,2} = \begin{pmatrix} a_{1\,n+1} & a_{1\,n+2} & \cdots & a_{1k} \\ a_{2\,n+1} & a_{2\,n+2} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n\,n+1} & a_{n\,n+2} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix}, \qquad (1.1.2.4)$$

$$A_{2\,1} = \begin{pmatrix} a_{n+1\,1} & a_{n+1\,2} & \cdots & a_{n+1\,n} \\ a_{n+2\,1} & a_{n+2\,2} & \cdots & a_{n+2\,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}, \qquad (1.1.2.5)$$

$$A_{2\,2} = \begin{pmatrix} a_{n+1\,n+1} & a_{n+1\,n+2} & \cdots & a_{n+1\,k} \\ a_{n+2\,n+1} & a_{n+2\,n+2} & \cdots & a_{n+2\,k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k\,n+1} & a_{k\;\;n+2} & \cdots & a_{k\,k} \end{pmatrix}, \qquad (1.1.2.6)$$

$$x = col(x_1, x_2, \ldots x_n), \;\; y = col(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots, x_k), \qquad (1.1.2.7)$$

$$b_1 = col(f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n)^T, \;\; b_2 = col\,(f_{n+1}, f_{n+2}, f_{n+3}, \ldots, f_k)^T, \;\; (m = k - n). \qquad (1.1.2.8)$$

Тогда, подставляя (1.1.2.3)-(1.1.2.7) в (1.1.2.2), получим

$$\left.\begin{aligned} x - A_{11}x - A_{12}y = b_1, \\ -y + A_{21}x + A_{22}y = b_2, \end{aligned}\right\},$$

или

$$\left.\begin{aligned} x &= A_{11}x + A_{12}y + b_1, \\ y &= A_{21}x + A_{22}y - b_2, \\ x \geq \theta, &\qquad y \geq \theta, \end{aligned}\right\} \qquad (1.1.2.9)$$

где $x \in R^n$ – вектор валового выпуска продукта, называемого полезным;

$y \in R^m$ – вектор вредных отходов, выбрасываемых в окружающую среду возникающих в процессе производства и подлежащих уничтожению для поддержания требуемого уровня экологического состояния;

b_1 – вектор размерности n, характеризующий чистый выпуск полезного продукта;

b_2 – вектор размерности m, характеризующий остаточный уровень вредных отходов, т.е. отходов, которые не могут быть ликвидированы;

A_{11} – технологическая матрица размера $n \times n$, называемая матрицей прямых затрат;

A_{12} – матрица размера $n \times m$, характеризующая затраты при уничтожении вредных отходов;

A_{21} – матрица размера $m \times n$, характеризующая объем вредных отходов, получаемых при выпуске полезного продукта;

A_{22} – матрица размера $m \times m$, характеризующая объемы вновь получаемых вредных веществ при уничтожении старых;

θ – нулевой вектор (размерности либо n, либо m).

Модель (1.1.2.9) называется моделью Леонтьева-Форда, учитывающей экологическое состояние окружающей среды [16, 17]. Она представляет собой балансовые соотношения между производством и потреблением в процессе производства, полученные в предположении линейной зависимости производственных затрат $A_{11}\,x$ от уровня валового выпуска x и уровня вредных отходов y, подлежащих уничтожению. Она обобщает описанную ранее модель Леонтьева, в которой не учитывается состояние экологического фактора окружающей среды.

Второе уравнение системы (1.1.2.9) можно записать в виде:

$$A_{21}\,x + A_{22}\,y - y = b_2\,.$$

Это соотношение означает, что разность между произведенным вредным отходом $\left(A_{21}\,x + A_{2\,2}\,y_2\right)$ и уничтоженной его величиной y равна остаточному уровню b_2 вредных отходов.

Формально систему уравнений (1.1.2.9) можно записать в виде векторно-матричного уравнения

$$\tilde{z} = \tilde{A}\,\tilde{z} + \tilde{f}\,, \qquad (1.1.2.9)$$

где $\tilde{z}$ – блочный вектор: $\tilde{z} = col(x, y) \in R^{n+m}$; $\tilde{A}$ – квадратная матрица, размерности, состоящая из четырех блоков:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}; \qquad (1.1.2.11)$$

$\tilde{f}$ – блочный вектор: $\tilde{f} = col(b_1, -b_2) \in R^{n+m}$.

1.1.3 Модель Леонтьева-Форда, учитывающая утилизацию вредных отходов

В процессе борьбы с загрязнением внешней среды часть вредных отходов может подвергаться утилизации. В итоге из вредных отходов за счет соответствующих технологических решений могут быть выделены полезные ингредиенты. Естественно, что такая переработка (утилизация) связана с определенными затратами полезных продуктов, а в процессе ее реализации возможно появление качественно новых вредных отходов. С учетом этих обстоятельств модель (1.1.2.9) может быть обобщена следующим образом [23]:

$$\left.\begin{aligned} x &= A_{11}x + A_{12}y + b_1 - A_{13}y, \\ y &= A_{21}x + A_{22}y - b_2 + A_{23}y, \\ x &\geq \theta, \qquad y \geq \theta, \end{aligned}\right\} \qquad (1.1.3.1)$$

где A_{13} – матрица размера $n \times m$, характеризующая затраты при утилизации отходов; A_{23} – матрица размера $m \times m$, характеризующая объемы вновь получаемых вредных веществ при утилизации старых.

Формально модель (1.1.3.1) может быть записана в виде матричного уравнения

$$\tilde{z} = \tilde{A}\,\tilde{z} + \tilde{f}\,, \qquad (1.1.3.2)$$

где

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} - A_{13} \\ A_{21} & A_{22} + A_{23} \end{pmatrix}, \qquad (1.1.3.3)$$

$$\tilde{f} = col(b_1, -b_2)^T \in R^{n+m}\,, \quad \tilde{z} = col(x, y)^T \in R^{n+m}\,.$$

Блочная матрица $\tilde{A}$ не обязательно является неотрицательной за счет присутствия в ней блока $A_{12} - A_{13}$.

1.2 Сведения из линейной алгебры и математического программирования, используемые для анализа балансовых моделей производства

1.2.1 Теоремы о существовании и единственности решения систем линейных алгебраических уравнений

Приведём цикл теорем [14, 41, 23], позволяющих провести исследование систем линейных алгебраических уравнений, содержащих n уравнений и n неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на предмет существования и единственности их решений:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{aligned}\right\} \qquad (1.2.1.1)$$

где $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$ – заданные коэффициенты, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ – заданные свободные члены.

Приводимые результаты будет использована при анализе балансовых моделей (представляющих собой системы подобного вида), рассматриваемых в последующих главах.

Обозначим через A и B соответственно матрицу коэффициентов и расширенную матрицу системы (1.2.1.1):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix},$$

через $rang\, A$, $rang\, B$ – ранги этих матриц.

1. Если $rang\, A < rang\, B$, то система (1.2.1.1) не имеет решений (случай $rang\, A > rang\, B$ невозможен).
2. (теорема Кронекера-Капелли). Система (1.2.1.1) тогда и только тогда совместна (имеет решение), когда $rang\, A = rang\, B$.
3. Совместная система (1.2.1.1) тогда и только тогда имеет единственное решение, когда $rang\, A = rang\, B = n$.

4. Совместная система (1.2.1.1) тогда и только тогда имеет множество решений, когда $rang\, A = rang\, B = k < n$.

1.2.2 Собственные векторы и собственные значения матриц

Собственным вектором матрицы A размера $n \times n$ называется ненулевой вектор, $x \in R^n$, R^n – n-мерное вещественное пространство, удовлетворяющий равенству

$$Ax = \lambda x, \tag{1.2.2.1}$$

где λ – некоторое действительное число, называемое собственным значением A (о собственных векторах и собственных значениях см., например, [33, 27]).

Из (1.2.2.1), следует, что

$$(A - \lambda \cdot I) \cdot x = \theta, \ \theta = (0, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}} \tag{1.2.2.2}$$

где I – единичная матрица, размера $n \times n$.

Из курса линейной алгебры известно, что система (1.2.2.2) имеет ненулевые решения, если

$$\det(A - \lambda \cdot I) = 0. \tag{1.2.2.3}$$

Уравнение (1.2.2.3) называют характеристическим уравнением, а выражение $\det(A - \lambda \cdot I)$ – характеристическим многочленом.

Из (1.2.2.3) определяются собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Решая однородную систему линейных алгебраических уравнений (1.2.2.2) при различных собственных значениях λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$(A - \lambda_i \cdot I) \cdot x^i = 0, \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

получим линейно независимые собственные векторы x^i, $i = 1, 2, \ldots, n$, соответствующие собственным значениям λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Отметим основные свойства собственных значений и собственных векторов.

1. (Теорема Перрона). Если все элементы квадратной матрицы положительны, то её наибольшее по модулю собственное значение является положительным вещественным числом, которое является простым корнем характеристического уравнения. Ему соответствует собственный вектор с положительными компонентами.

2. Если собственному значению λ_i соответствует собственный вектор x^i, то вектор $c\, x^i$, где c – произвольное

действительное число также является собственным вектором, соответствующим собственному значению λ_i (при этом векторы x^i и $c\,x^i$ очевидно являются линейно зависимыми).

3. Попарно различным собственным значениям λ_i, λ_j соответствуют линейно независимые собственные векторы x^i, x^j.

4. К – кратному корню характеристического уравнения (1.2.2.3), построенного для произвольной матрицы $A_{n\times n}$, соответствует не более $к$ линейно независимых собственных векторов.

1.2.3 Число обусловленности матрицы

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений (для удобства записи заданную в матричном виде):

$$Ax = f, \tag{1.2.3.1}$$

где A – квадратная матрица коэффициентов размера $n\times n$, f – заданный вектор свободных членов размерности n. На практике, как правило, коэффициенты системы (1.2.3.1) (элементы матрицы A) и свободные члены f задают с некоторыми погрешностями и вместо системы (1.2.3.1) приходится решать систему

$$\tilde{A}\,x = \tilde{f},$$

где $\tilde{A}$, $\tilde{f}$ – заданные приближенно матрица A и вектор f.

Обозначим через x – решение системы (1.2.3.1), через $\bar{x}$ – решение системы (1.2.3.2). Возникает вопрос: как сильно будут отличаться решения x и $\bar{x}$ систем (1.2.3.1) и (1.2.3.2) при заданных ζ – абсолютной погрешности матрицы $\tilde{A}$, $\|\tilde{A}-A\|<\xi$, т.е. и η – абсолютной погрешности вектора $\tilde{f}$, т.е. $\|\tilde{f}-f\|<\eta$. Здесь $\|C\|$ – норма матрицы C (определение нормы матрицы см., например, в [6, 35]). Оказывается [35], что достаточно полную информацию о величине разности $\|\bar{x}-x\|$ можно получить только через матрицу A из (1.2.3.1). Для этого вводится число

$$v(A) = \frac{\|A\|}{\|A^{-1}\|}, \tag{1.2.3.3}$$

называемое числом обусловленности матрицы A (системы (1.2.3.1)). Здесь A^{-1} – матрица, обратная по отношению к матрице A.

Если $\nu(A) < 10^3$, то матрицу принято считать хорошо обусловленной, в противном случае, при $\nu(A) \geq 10^3$, – плохо обусловленной.

Если A плохо обусловлена, то ошибка $\|\bar{x} - x\|$ в решении x системы (1.7.1) будет значительной.

Задачу построения решения x системы (1.2.3.1) с плохо обусловленной матрицей A принято называть некорректно поставленной.

Системы (1.2.3.1) с плохо обусловленными матрицами A целесообразно решать с помощью специально разработанных методов решения некорректно поставленных задач – методов регуляризации [35, 32].

В работе анализ и решение систем линейных алгебраических уравнений вида (1.2.3.1) осуществляется с помощью специальной функции «Поиск решения» офисной программы Microsoft Office Excel и функции *cond* пакета прикладных программ Maplesoft Maple V10.0.

1.2.4 Оптимизационные задачи

Приведем общую постановку оптимизационных задач, с которыми в той или иной мере придется сталкиваться в последующих главах данной работы.

Задача линейного программирования [1, 11, 14, 28, 37]. Пусть требуется найти минимальное (или максимальное) значение линейной функции n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \qquad (1.2.4.1)$$

в предположении, что переменные удовлетворяют ограничениям, задаваемым в виде системы линейных равенств и неравенств:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1, \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \ldots, \quad x_n \geq 0, \end{array}\right\} \qquad (1.2.4.2)$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$, $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$, $b_1, b_2, \ldots, b_m$ – заданные действительные числа, причем $b_1 \geq 0, b_2 \geq 0, \ldots, b_m \geq 0$.

Задача построения вектора $(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющего системе ограничений (1.2.4.2) и доставляющего минимальное (или максимальное) значение функции (1.2.4.1) (задача построения решения (1.2.4.1), (1.2.4.2)) называется задачей линейного программирования. Функция (1.2.4.1) называется целевой функцией.

Для решения задач линейного программирования чаще всего используется так называемый симплекс-метод. Симплекс-метод подробно описан в многочисленной литературе (см., например, [11, 31]).

В данной работе с задачами линейного программирования мы сталкиваемся в 4 главе при анализе балансовых моделей. Эти задачи будут решаться с помощью офисной программы Excel.

Задача квадратичного программирования [11]. Пусть требуется найти минимальное (или максимальное) значение функции *n* переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, представляющее собой сумму линейной и квадратичной функций

$$\begin{aligned} z &= c_1\,x_2 + c_2\,x_2 + \ldots + c_n\,x_n + \\ &+ d_{11}\,x_1^2 + d_{22}\,x_2^2 + \ldots + d_{nn}\,x_n^2 + \\ &+ 2\,d_{12}\,x_1\,x_2 + 2\,d_{13}\,x_1\,x_3 + \ldots + 2\,d_{(n-1)n}\,x_{n-1}\,x_n \end{aligned} \qquad (1.2.4.3)$$

$c_1, c_2, \ldots, c_n$, $d_{11}, d_{12}, \ldots, d_{nn}$ – заданные действительные числа, в предположении, что переменные удовлетворяют системе ограничений (1.2.4.2).

Задача построения вектора $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющего системе ограничений (1.2.4.2) и доставляющего минимальное (максимальное) значение функции (1.2.4.3), называется задачей квадратичного программирования, функция (1.2.4.3) – целевой функцией. Задача квадратичного программирования является случаем задачи нелинейного программирования и может быть решена одним из методов решения таких задач [11]. Однако для решения задачи квадратичного программирования разработаны специальные, более эффективные методы решения: Била, Баранкина-Дорфмана, Франка-Вольфа [11].

В данной работе с задачами квадратичного программирования мы столкнемся, так же как и с задачами линейного программирования, при анализе балансовых моделей. Эти задачи также будут решаться с помощью офисной программы Microsoft Office Excel 2003.

1.3 Продуктивность балансовых моделей

1.3.1 Продуктивность модели Леонтьева

Модель Леонтьева (1.1.1.16) называется продуктивной, если она допускает неотрицательное решение x, т.е. $x \geq 0$ ($0 - n$-мерный нулевой вектор).

Согласно [6] квадратная матрица A называется **разложимой**, если с помощью перестановки строк и столбцов она может быть приведена к виду

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix},$$

где B, C, D ненулевые матрицы, причем B, D – квадратные матрицы, 0 – нулевая матрица. В противном случае (т.е. когда такое представление A невозможно) A называется неразложимой.

Далее всюду будем предполагать, что технологическая матрица A в (1.1.1.16) является неразложимой.

Экономически неразложимость технической матрицы A означает, что каждая отрасль хотя бы косвенно использует продукцию всех рассматриваемых отраслей.

Для неразложимой матрицы справедлива следующая теорема Фробениуса-Перрона [6]:

1. Любая неразложимая матрица A имеет собственное число λ, которое является вещественным положительным, т.е. $\lambda > 0$, и которое превосходит модули всех остальных чисел этой матрицы.

2. Собственному числу λ из п.1 соответствует с точностью до скалярного единственный собственный вектор x_λ (с точностью до скалярного множителя k), все координаты которого отличны от нуля и имеют один знак (т.е. x_λ всегда можно выбрать положительным за счет выбора знака у множителя k).

Опираясь на приведенную теорему Фробениуса-Перрона, можно доказать следующие утверждение, играющее важную роль в прикладных исследованиях при анализе балансовых моделей: модель Леонтьева (1.1.1.16) продуктивна тогда и только тогда, когда собственное число λ из теоремы Фробениуса-Перрона $\lambda < 1$.

Указанное в теореме Фробениуса-Перрона собственное число λ часто называют спектральным радиусом матрицы A и обозначают $\rho(A)$, т.е. $\lambda = \rho(A)$. Это соглашение позволяет сформулировать последнюю теорему следующим образом: модель Леонтьева (1.1.1.16) продуктивна тогда и только тогда, когда спектральный радиус $\rho(A)$, технологической матрицы удовлетворяет условию $\rho(A)<1$.

Модель Леонтьева (1.1.1.16) можно переписать, очевидно, в следующем виде

$$(E-A)x=f\,, \tag{1.3.1.1}$$

где E – единичная матрица размера $n\times n$. Если матрица $(E-A)$ является невырожденной, т.е. её определитель отличен от нуля $|E-A|=0$, то она имеет обратную $(E-A)^{-1}$[14]. Если обратная матрица $(E-A)^{-1}$ неотрицательна, т.е. $(E-A)^{-1}\geq 0$, где 0 – квадратная нулевая матрица размера $n\times n$ (т.е. того же размера, что и A), то матрица $(E-A)$ называется неотрицательно обратимой.

В системе (1.3.1.1) квадратную матрицу $(E-A)$ размера $n\times n$ обозначим через D:

$$D=E-A, \tag{1.3.1.2}$$

т.е. элементы $d_{i\,j}$, $\quad i,\,j=1,2,\ldots,n$, матрицы D имеют вид:

$$d_{i\,j}=\begin{cases}1-a_{i\,j}, & i=j,\quad i,\ j=1,\ldots,n,\\ \ \ a_{i\,j}, & i\neq j,\quad i,\ j=1,\ldots,n.\end{cases}$$

Тогда (1.3.1.1) можно представить в виде:

$$Dx=f\,. \tag{1.3.1.3}$$

Справедливо следующее необходимое и достаточное условие продуктивности модели (1.1.1.16) [15]. Модель Леонтьева (1.1.1.16) продуктивна тогда и только тогда, когда матрица D, зависимая выражением (1.3.1.2), удовлетворяет условию Хокинса-Саймона:

$$d_{11}>0,\quad \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12}\\ d_{21} & d_{22}\end{vmatrix}>0,\quad \ldots,\quad \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \ldots & d_{1n}\\ d_{21} & d_{22} & \ldots & d_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ d_{n1} & d_{n2} & \ldots & d_{nn}\end{vmatrix}>0$$

(т.е. когда все главные миноры D положительны).

Приведем ещё два необходимых и достаточных условия продуктивности (1.1.1.16) [38].

1. Модель Леонтьева (1.1.1.16) продуктивна тогда и только тогда, когда матрица $(E-A)$ неотрицательно обратима.

2. Модель Леонтьева (1.1.1.16) продуктивна тогда и только тогда, когда матричный ряд $E + A + A^2 + A^3 + \ldots = \sum_{K=0}^{\infty} A^K$ сходится и его сумма равна $(E - A)^{-1}$.

Относительно простым, легко проверяемым на практике достаточным условием продуктивности (1.1.1.16) является условие, ограниченности нормы A [34]: для продуктивности модели Леонтьева (1.1.1.16) достаточно, чтобы норма $\|A\|$ была меньше 1, т.е. $\|A\| < 1$.

Определение нормы матрицы A, её свойства и способы её задания можно найти, например, в [6, 35, 36].

1.3.2 Продуктивность модели Леонтьева-Форда

Балансовая модель Леонтьева-Форда (см. 1.1.2.9):

$$\left.\begin{aligned} x &= A_{11}x + A_{12}y + b_1, \\ y &= A_{21}x + A_{22}y - b_2, \end{aligned}\right\} \tag{1.3.2.1}$$

называется (по аналогии с моделью Леонтьева (1.1.1.16)) продуктивной, если она имеет неотрицательное решение (x, y), т.е. $(x, y) \geq 0$, где $0 -$ нулевой вектор из вещественного R^{n+m}.

Обозначим

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ \tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ -b_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда (1.3.2.1) можно переписать в виде

$$z = \tilde{A}\, z + b\,. \tag{1.3.2.2}$$

Оказывается [5], что в отличие от модели Леонтьева (1.1.1.16) для продуктивности модели (1.3.2.2) уже недостаточно выполнения только условия

$$\rho\left(\tilde{A}\right) < 1, \tag{1.3.2.3}$$

где $\rho\left(\tilde{A}\right)$ – спектральный радиус матрицы $\tilde{A}$. В данном случае, кроме выполнения условия (1.3.2.3), надо потребовать, чтобы выполнились ещё некоторые дополнительные ограничения. Точнее, имеет место следующий результат [5]. Пусть для модели (1.3.2.1)- (1.3.2.2) выполнено условие (1.3.2.3), и, кроме того, векторы b_1, b_2 удовлетворяют условиям

$$\left.\begin{aligned} b_1 + A_{11}b_1 + A_{12}b_2 &\geq 0_1, \\ -b_2 + A_{21}b_1 + A_{22}b_2 &\geq 0_2, \end{aligned}\right\} \tag{1.3.2.4}$$

где $0_1, 0_2$ – нулевые векторы соответственно из R^n и R^m. Тогда модель Леонтьева-Форда (1.3.2.1), имеет и притом единственное неотрицательное решение $(\bar{x}, \bar{y})$, к которому сходится последовательные приближения

$$\left.\begin{aligned} x_{k+1} &= A_{11}x_k + A_{12}y_k + b_1, \\ y_{k+1} &= A_{21}x_k + A_{22}y_k - b_2, \end{aligned}\right\},$$
$$k = 0, 1, 2, \ \ldots,$$

при любом начальном приближении (x_0, y_0), $x_0 \in R^n$, $y_0 \in R^m$.

В главе I анализированы известные экономико-математические балансовые модели (Леонтьева, Леонтьева-Форда, Леонтьева-Форда, учитывающая утилизацию вредных отходов), приводятся критерии их продуктивности, основные сведения из математического программирования и линейной алгебры, которые будут использованы в последующих главах при анализе моделей Леонтьева, Леонтьева-Форда.

Контрольные вопросы и задания

1. Опишите экономико-математическую балансовую модель Леонтьева.
2. Опишите экономико-математическую балансовую модель Леонтьева-Форда.
3. Опишите модель Леонтьева-Форда, учитывающую утилизацию вредных отходов.
4. Приведите необходимое и достаточное условие продуктивности модели Леонтьева.
5. В каких случаях модель Леонтьева-форда называется продуктивной?
6. Что называют собственным значением матрицы?
7. Что называют числом обусловленности матрицы?
8. Какая задача называется задачей линейного программирования?
9. Какие методы чаще всего используются для решения задач линейного программирования?

ГЛАВА II. ПРИМЕНЕНИЕ БАЛАНСОВЫХ МОДЕЛЕЙ

2.1 Применение модели Леонтьева для анализа балансовой модели АПК МСХ КЧР

Согласно условию 4 (см. п.п. 1.1.1 из главы I), одним из требований, которые должны быть выполнены при построении модели Леонтьева, является требование о постоянстве элементов технологической матрицы A и вектора чистого дохода f в модели (1.1.15) в течение некоторого заданного периода времени. Это может быть только в том случае, когда в схеме (таблице) межотраслевого баланса (см. таблицу 1) все элементы $x_{ij}, f_i, x_i, i, j = 1, \ldots, n$ являются постоянными в течение этого периода времени. На практике, как правило, всегда наблюдаются определенные (но не слишком существенные) колебания этих величин, т.е. если в рассматриваемый период времени в заданные моменты времени $k = 1,2,\ldots,r$ построено несколько таблиц межотраслевого баланса, то их элементы будут испытывать определенные колебания. Чтобы их сгладить, здесь предлагается следующий подход.

Пусть x^0_{ij}, f^0_i, x^0_i – неизвестные «идеальные» значения величин x_{ij}, f_i, x_i, а $x^{(k)}_{ij}, f^{(k)}_i, x^{(k)}_i$ – их статистические (экспериментальные) значения, $i, j = 1, \ldots, n$, $k = 1,2,\ldots,r$, полученные из каждой отрасли в дискретные моменты времени $k = 1,2,\ldots,r$ с некоторыми погрешностями, порожденными ошибками измерения (наблюдения). Найдем наилучшие в среднеквадратическом смысле оценки $\bar{x}_{ij}, \bar{f}_i, \bar{x}_i$ величин x^0_{ij}, f^0_i, x^0_i, решая следующие задачи квадратичного программирования:

$$\sum_{k=1}^{r}\left(x_{ij}^{(k)} - x_{ij}^{(0)}\right)^2 \to \min, \quad x_{ij}^{(0)} \geq 0; \tag{2.1.1}$$

$$\sum_{k=1}^{r}\left(f_i^{(K)} - f_i^0\right)^2 \to \min, \ f_i^0 \geq 0; \tag{2.1.2}$$

$$\sum_{k=1}^{r}\left(x_i^{(K)} - x_i^0\right)^2 \to \min, \ x_i^0 \geq 0. \tag{2.1.3}$$

Легко убедиться (по обычным правилам нахождения экстремума), что

$$\bar{x}_{ij} = \frac{x_{ij}^{(1)} + \ldots + x_{ij}^{(r)}}{r} \approx x_{ij}^{(0)}, \tag{2.1.4}$$

$$\bar{f}_i = \frac{f_i^{(1)} + \ldots + f_i^{(r)}}{r} \approx f_i^{(0)}, \qquad (2.1.5)$$

$$\bar{x}_i = \frac{x_i^{(1)} + \ldots + x_i^{(r)}}{r} \approx x_i^{(0)}. \qquad (2.1.6)$$

Соотношения (2.1.4)-(2.1.6) показывают, что если заданы за определенный период времени несколько таблиц межотраслевого баланса, то на их основе целесообразно построить одну, в которой элементы являются средним арифметическими соответствующих элементов данных таблиц. Этот факт будем учитывать при построении балансовых моделей сельхозпроизводства Карачаево-Черкесской республики и некоторых её экономических субъектов.

Статистические данные межотраслевого баланса сельскохозяйственного производства Карачаево-Черкесской Республики за 2002 год, взятые из данных агропромышленного комплекса Министерства сельского хозяйства Карачаево-Черкесской республики (АПК МСХ КЧР), представлены в таблице 2:

Таблица 2 –Таблица межотраслевого баланса четырёх отраслевой экономики АПК МСХ КЧР, построенная по данным за 2002 год (тыс. руб.)

Производящие отрасли		Потребляющие отрасли				Конечный спрос	Валовой продукт
		1	2	3	4		
1	Растениеводство	63407	1005	3000	510	334395	402317
2	Животноводство	87	99986	21300	8312	47297	176982
3	Промышленность	1196	808	17725	851	223178	243758
4	Обслуживание	2287	1972	2803	37800	40204	85066

Согласно этой таблице по строкам рассматривается распределение продукции по отраслям.

Из общего объема продукции на сумму 4002317 тыс. руб. отрасли «растениеводство» распределяется: на сумму 63407 тыс. руб. – внутри самой отрасли, на 1005 тыс. руб. – поставляется в отрасль «животноводство», на 3000 тыс. руб. – поставляется в отрасль «промышленность», на 510 тыс. руб. – поставляется в отрасль «обслуживание» и на 334395 тыс. руб. её продукции идет на внешнее потребление.

Из общего объема продукции на сумму 176982 тыс. руб. отрасли «животноводство» распределяется: на сумму 99986 тыс.

руб. – внутри самой отрасли, на 87 тыс. руб. поставляется в отрасль «растениеводство», на 21300 тыс. руб. поставляется в отрасль «промышленность», на 8312 тыс. руб. поставляется в отрасль «обслуживание» и на 47297 тыс. руб. её продукции идет на внешнее потребление.

Из общего объема продукции отрасли «промышленность» на сумму 243758 тыс. руб. распределяется: на сумму 17725 тыс. руб. внутри самой отрасли, на 1196 тыс. руб. поставляется в отрасль «растениеводство», на 808 тыс. руб. поставляется в отрасль «животноводство», на 851 тыс. руб. поставляется в отрасль «обслуживание» и на 223178 тыс. руб. её продукции идет на внешнее потребление.

Из общего объёма продукции на сумму 85066 тыс. руб. отрасли «обслуживание» распределяется: на сумму 37800 тыс. руб. распределяется внутри самой отрасли, на 2287 тыс. руб. поставляется в отрасль «растениеводство», на 1972 тыс. руб. поставляется в отрасль «животноводство», на 2803 тыс. руб. поставляется в отрасль «промышленность» и на 40204 тыс. руб. её продукции идет на внешнее потребление.

Аналогично статистические данные межотраслевого баланса сельскохозяйственного производства агропромышленного комплекса Министерства сельского хозяйства Карачаево-Черкесской Республики:

– за 2003 год, представлены в таблице 3;
– за 2004 год – в таблице 4;
– за 2005 – в таблице 5;
– за 2006 год – в таблице 6;
– за 2007 год – в таблице 7.

Таблица 3 – Таблица межотраслевого баланса четырёхотраслевой экономики АПК МСХ КЧР, построенная по данным за 2003 год (тыс. руб.)

Производящие отрасли		Потребляющие отрасли				Конечный спрос	Валовой продукт
		1	2	3	4		
1	Растениеводство	59659	45798	222251	1064	44749	373521
2	Животноводство	610	95820	21705	7891	44567	170593
3	Промышленность	519	2308	45878	381	542217	591303
4	Обслуживание	2280	2238	2701	24311	49324	80854

Таблица 4 – Таблица межотраслевого баланса четырёхотраслевой экономики АПК МСХ КЧР, построенная по данным за 2004 год (тыс. руб.)

Производящие отрасли		Потребляющие отрасли				Конечный спрос	Валовой продукт
		1	2	3	4		
1	Растениеводство	58828	45747	211967	1076	41090	358708
2	Животноводство	217	79375	21893	6265	68375	176125
3	Промышленность	310	1314	25625	231	322538	349787
4	Обслуживание	1750	1698	2470	22800	67270	73188

Таблица 5 – Таблица межотраслевого баланса четырёхотраслевой экономики АПК МСХ КЧР, построенная по данным за 2005 год (тыс. руб.)

Производящие отрасли		Потребляющие отрасли				Конечный спрос	Валовой продукт
		1	2	3	4		
1	Растениеводство	49276	36218	169721	810	28857	284882
2	Животноводство	0	63841	14560	4895	29356	112652
3	Промышленность	320	1210	28314	240	341192	371276
4	Обслуживание	916	780	1090	9898	20125	32809

Таблица 6 – Таблица межотраслевого баланса четырёхотраслевой экономики АПК МСХ КЧР, построенная по данным за 2006 год (тыс. руб.)

Производящие отрасли		Потребляющие отрасли				Конечный спрос	Валовой продукт
		1	2	3	4		
1	Растениеводство	49152	34850	162343	775	26343	273463
2	Животноводство	0	68160	15330	5406	31382	120278
3	Промышленность	332	1341	32522	279	392505	426979
4	Обслуживание	5939	5696	7920	75620	155458	250633

Таблица 7 – Таблица межотраслевого баланса четырёхотраслевой экономики АПК МСХ КЧР за 2007 год (тыс. руб.)

Производящие отрасли		Потребляющие отрасли				Конечный спрос	Валовой
		1	2	3	4		
1	Растениеводство	45434.2	26548.9	124259.8	821.1	76636	273700
2	Животноводство	113.3	61182.5	14729	4532	32743.99	113301
3	Промышленность	620.7	2482.98	49659.6	620.7	567360.9	620745
4	Обслуживание	10314.5	9901.92	13615	134501	244247.4	412580

С учетом данных таблиц 2-7, составим таблицу их усредненных значений (см. таблицу 8).

Таблица 8 – Таблица межотраслевого баланса четырёхотраслевой экономики АПК МСХ КЧР за 2002-2007 годы, построенная по усредненным значениям данных таблиц 2-7 (тыс. руб.)

Производящие отрасли		Потребляющие отрасли				Конечный спрос	Валовой продукт
		1	2	3	4		
1	Растениеводство	54409	31793	148805	983	91774	327765.2
2	Животноводство	144.9	78293.7	18848.5	5799.5	41902	144988.5
3	Промышленность	433.9	1735.8	34717.9	433.9	396652.8	433974.7
4	Обслуживание	3896.37	3740.5	5143.2	50808.7	92266.2	155855

На основе таблицы 8, построим матрицу продуктивности (по методике, описанной в главе I):

$$A = \begin{pmatrix} 0.166 & 0.097 & 0.454 & 0.003 \\ 0.001 & 0.54 & 0.13 & 0.04 \\ 0.001 & 0.004 & 0.08 & 0.001 \\ 0.025 & 0.024 & 0.033 & 0.326 \end{pmatrix}. \qquad (2.1.7)$$

Используя матрицу продуктивности (2.1.7), и задавшись вектором спроса

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \qquad (2.1.8)$$

на продукцию сельскохозяйственного производства Карачаево-Черкесской республики, можно легко рассчитать с помощью разработанного программного продукта «Комплекс программ «Balance» (описание см. в п. 3.1. глава III) вектор валового выпуска

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}, \qquad (2.1.9)$$

сельскохозяйственной продукции Карачаево-Черкесской республики на ближайшие годы вперед (см. 3.1).

Далее рассматривая модель Леонтьева вида

$$x=Ax+b,$$

легко понять, что при изменении компонент b_1, b_2, b_3, b_4 на интервале $[0,\infty)$ вектора спроса (2.1.8) будут изменяться на этом интервале компоненты x_1, x_2, x_3, x_4 вектора валового выпуска (2.1.9) (это легко следует из соотношения $x=(E-A)^{-1}b$). Этот факт указывает на то, что x является вектором-функцией переменных b_1, b_2, b_3, b_4, т.е.

$$x_1 = f_1(b_1\ b_2\ b_3\ b_4),$$
$$x_2 = f_2(b_1\ b_2\ b_3\ b_4),$$
$$x_3 = f_3(b_1\ b_2\ b_3\ b_4),$$
$$x_4 = f_4(b_1\ b_2\ b_3\ b_4). \qquad (2.1.10)$$

Задавшись одной из переменных b_i, $i=1,\dots,4$ и фиксируя остальные переменные, легко проследить изменения значений x_1, x_2, x_3, x_4 в зависимости от изменения значений переменной b_i на интервале $[0,\infty)$. Таблицы некоторых таких зависимостей приведены в таблицах 9-12, а их графики, полученные с помощью разработанного программного продукта «Комплекс программ «Balance» (описание см. в п. 3.1. глава III) и построенные с помощью программы Microsoft Office Excel, приведены на рисунках 24-39.

Таблица 9 – Зависимость x_1, x_2, x_3, x_4 от изменений b_1 (при $b_2=41902$ тыс. руб., $b_3=396653$ тыс. руб., $b_4=92266$ тыс. руб.) (тыс. руб.)

Значение конечного спроса отрасли «растениеводство» b1	x_1	x_2	x_3	x_4
51774	324963.8	229584.6	432689.8	178307
56774	330967.6	229619	432696.7	178531
61774	336971.4	22965.6	432703.6	178755.5
66774	342975	229688	432710.5	178979.7
71774	348978.9	229722.6	432717.5	179204

76774	354982.7	229757	432724.4	179428.3
81774	360986.5	229791.6	432731.3	179652.5
86774	366990	229826	432738	179876.8
91774	372994	229860.7	432745	180101
96774	378998	229895	432752	180325
101774	385001.7	229929.7	432759	180549.6
106774	391005.5	229964	432765.9	180773.8
111774	397009	229998.7	432772.8	180998
116774	403013	230033	432779.7	181222
121774	409016.8	230067.7	432786.7	181446.6
126774	415020.6	230102.2	432793.6	181670.9
131774	421024	230136.7	432800.5	181895
136774	427028	230171	432807	182119
141774	433032	230205.7	432814	182343.6
146774	439035.8	230240	432821	182567.9
151774	445039.6	230274.8	432828	182792
156774	451043	230309	432835	183016
161774	457047	230343.8	432842	183240.7
166774	463051	230378	432849	183465
171774	469054.8	230412.8	432855.9	183689
176774	475058.5	230447	432862.8	183913.5
181774	481062	230481.8	432869.7	184137.7
186774	487066	230516	432876.6	184362

Таблица 10 – Зависимость x_1, x_2, x_3, x_4 от изменений b_2 (при $b_1 = 91774$ тыс. руб., $b_3 = 396653$ тыс. руб., $b_4 = 92266$ тыс. руб.) (тыс. руб.)

Значение конечного спроса отрасли «животноводство» b_2	x_1	x_2	x_3	x_4
1902	362601.5	142464	432350	176584
6902	363900.6	153388.6	432399	177023.8
11902	365199.7	164313	432448.8	177463
16902	366498.8	175237.8	432498	177903
21902	367797.8	186162	432547.6	178342.6
26902	369097	197087	432597	178782
31902	370396	208011.5	432646	179221.8
36902	371695	218936	432695.8	179661
41902	372994	229860.7	432745	180101
46902	374293	240785	432794	180540.6
51902	375592	251709.8	432843.9	180980
56902	376891	262634	432893	181419.9
61902	378190	273559	432942.7	181859.5
66902	379489.5	284483.5	432992	182299
71902	380788.5	295408	433041.5	182738.7
76902	382087.6	306332.6	433090.9	183178
81902	383386.7	317257	433140	183617.9
86902	384685.7	328181.8	433189.6	184057.5
91902	385984.8	339106	433239	184497
96902	387283.9	350031	433288	184936.7
101902	388583	360955.6	433337.8	185376
106902	389882	371880	433387	185815.9
111902	391181	382804.7	433436.6	186255.6
116902	392480	393729	433486	186695
121902	393779	404653.8	433535	187134.8
126902	395078	415578	433584.7	187574
131902	396377	426503	433634	188014
136902	397676	437427.6	433683.5	188453.6

Таблица 11 – Зависимость x_1, x_2, x_3, x_4 от изменений b_3 (при $b_1 = 91774$ тыс. руб., $b_2 = 41902$ тыс. руб., $b_4 = 92266$ тыс. руб.) (тыс. руб.)

Значение конечного спроса отрасли «промышленность» b_3	x_1	x_2	x_3	x_4
356653	347792.5	217188	389180.6	176582
361653	350942.7	218772	394626	177021.9
366653	354092.9	220356	400071.7	177461.8
371653	357243	221940	405517	177901.7
376653	360393	223524	410962.9	178341.5
381653	363543.5	225108.5	416408	178781
386653	366693.7	226692.5	421854	179221
391653	369843.9	228276.6	427299.6	179661
396653	372994	229860.7	432745	180101
401653	376144	231444.7	438190.7	180540.9
406653	379294.5	233028.8	443636	180980.8
411653	382444.7	234612.9	449081.9	181420.7
416653	385594.9	236196.9	454527	181860.5
421653	388745	237780.98	459973	182300
426653	391895	239365	465418.6	182740
431653	395045.5	240949	470864	183180
436653	398195.7	242533	476309.7	183620
441653	401345.9	244117	481755	184059.9
446653	404496	245701	487200.9	184499.8
451653	407646	247285	492646	184939.7
456653	410796.5	248869	498092	185379.5
461653	413946.67	250453.5	503537.6	185819
466653	417096.9	252037.6	508983	186259
471653	420247	253621.6	514428.7	186699
476653	423397	255205.7	519874	187139
481653	426547	256789.8	525319.9	187578.9
486653	429697.6	258373.8	530765.5	188018.8
491653	432847.8	259957.9	536211	188458.7

Таблица 12– Зависимость x_1, x_2, x_3, x_4 от изменений b_4 (при $b_1 = 91774$ тыс. руб., $b_2 = 41902$ тыс. руб., $b_3 = 396653$ тыс. руб.) (тыс. руб.)

Значение конечного спроса отрасли «обслуживание» b4	x_1	x_2	x_3	x_4
52266	372126	224653.9	432656.8	120531.9
57266	372234.7	225304.7	432667.9	127978
62266	372343	225955.6	432678.9	135424
67266	372451.6	226606	432689.9	142870
72266	372560	227257	432701	150316.5
77266	372668.6	227908	432712	157762.6
82266	372777	228559	432723	165208.8
87266	372885.6	229209.8	432734	172654.9
92266	372994	229860.7	432745	180101
97266	373102.6	230511.5	432756	187547
102266	373211	231162	432767	194993
107266	373319.6	231813	432778	202439
112266	373428	232464	432789	209885.6
117266	373536.7	233114.9	432800	217331.7
122266	373645	233765.7	432811	224777.9
127266	373753.6	234416.6	432822	232224
132266	373862	235067	432833	239670
137266	373970.5	235718	432844.5	247116
142266	374079	236369	432855.6	254562
147266	374187.5	237020	432866.6	262008.6
152266	374296	237670	432877.6	269454.7
157266	374404.5	238321.7	432888.7	276900.8
162266	374513	238972.5	432899.7	284347
167266	374621.5	239623	432910.8	291793
172266	374730	240274	432921.8	299239
177266	374838.5	240925	432932.9	306685
182266	374947	241575.9	432943.9	314131.5
187266	375055.5	242226.8	432955	321577.7

1. Графики зависимостей x_1, x_2, x_3, x_4 от изменений b_1 (при $b_2 = 41902$ тыс. руб., $b_3 = 396653$ тыс. руб., $b_4 = 92266$ тыс. руб.), на рисунках 1-4:

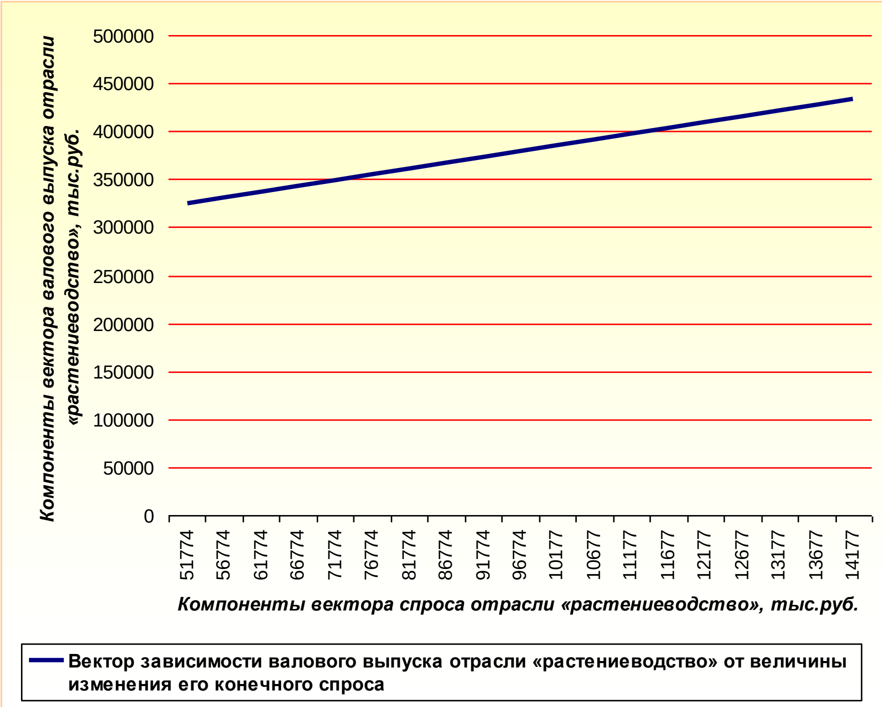

Рисунок 1 – График зависимости вектора валового выпуска отрасли «растениеводство» от величины изменения его конечного спроса

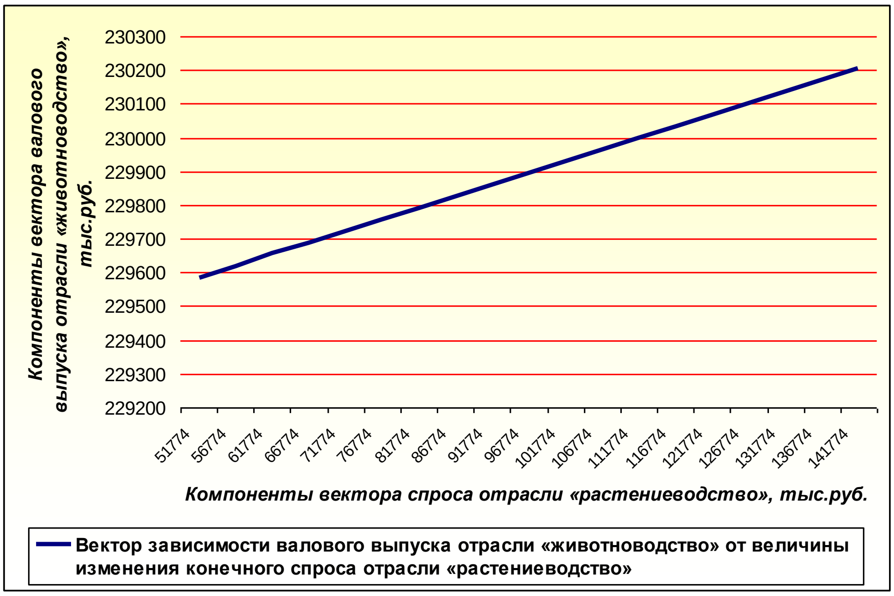

Рисунок 2 – График зависимости вектора валового выпуска отрасли «животноводство» от величины изменения конечного спроса отрасли «растениеводство»

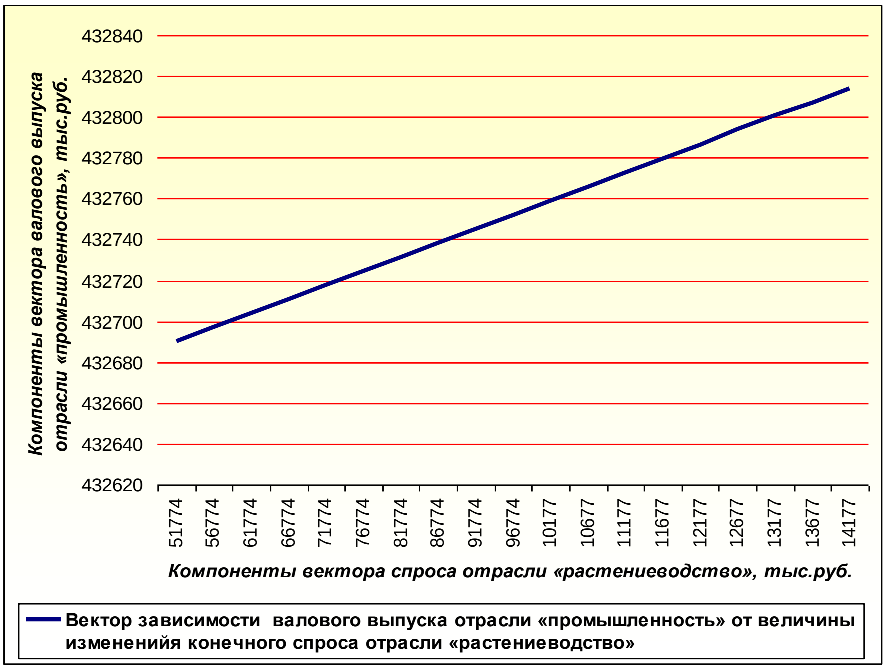

Рисунок 3 – График зависимости вектора валового выпуска отрасли «промышленность» от величины изменения конечного спроса отрасли «растениеводство»

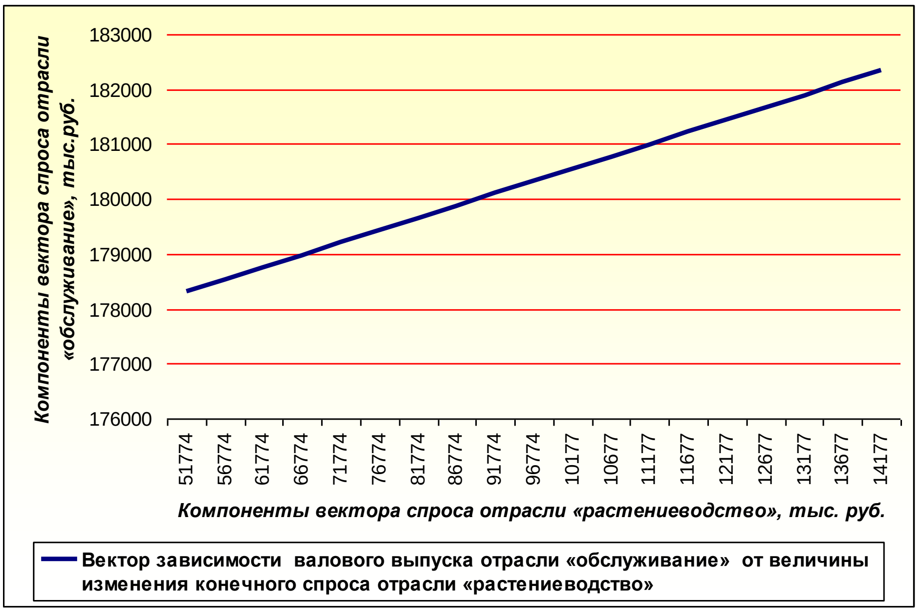

Рисунок 4 – График зависимости вектора валового выпуска отрасли «обслуживание» от величины изменения конечного спроса отрасли «растениеводство»

2. Графики зависимостей x_1, x_2, x_3, x_4 от изменений b_2 (при $b_1 = 91774$ тыс. руб., $b_3 = 396653$ тыс. руб., $b_4 = 92266$ тыс. руб.), на рисунках 5-8:

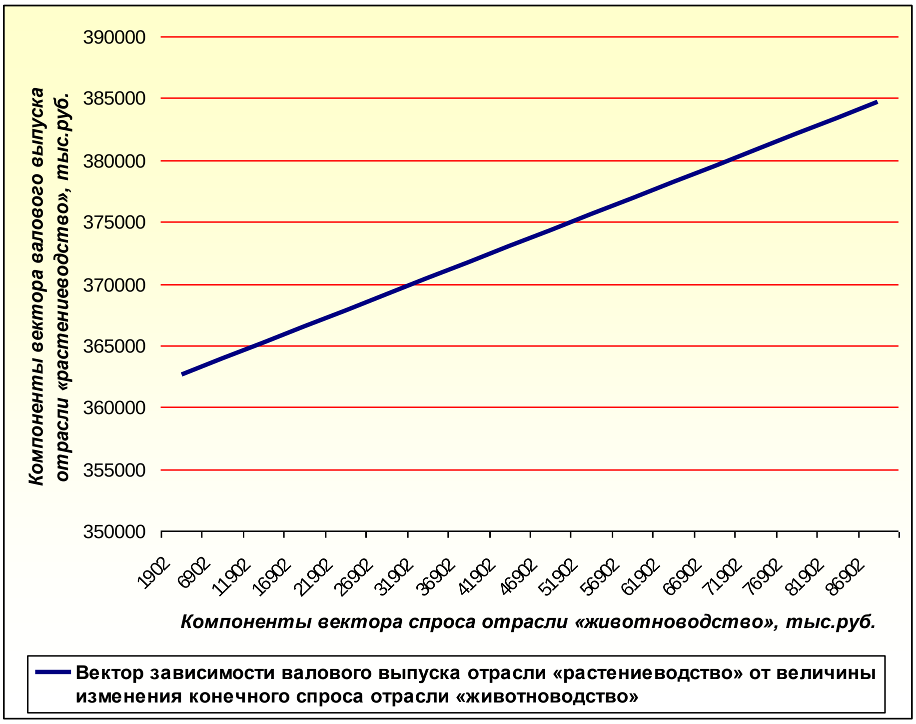

Рисунок 5 – График зависимости вектора валового выпуска отрасли «растениеводство» от величины изменения конечного спроса отрасли «животноводство»

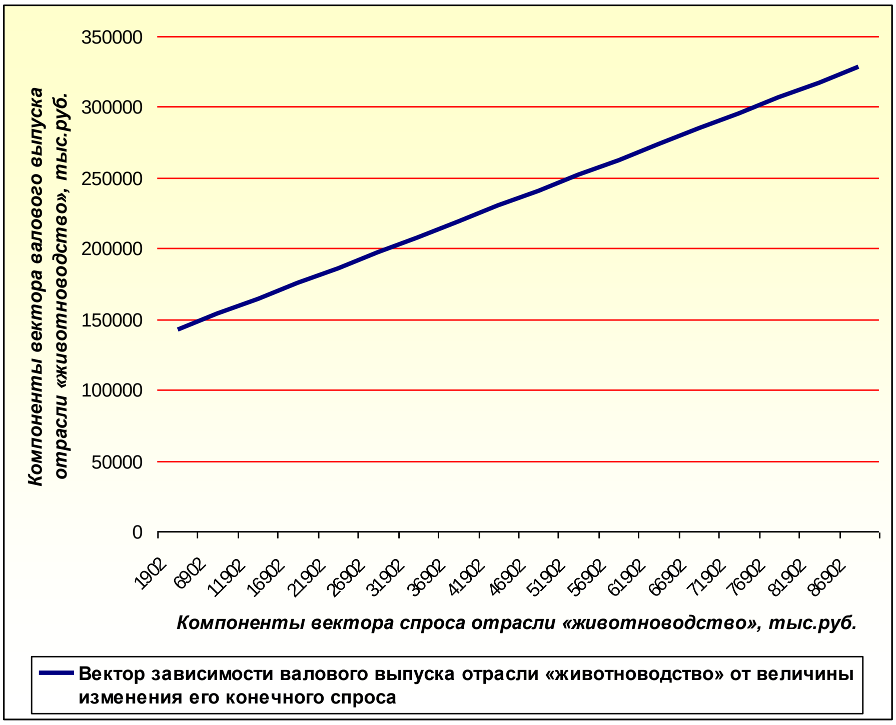

Рисунок 6 – График зависимости вектора валового выпуска отрасли «животноводство» от величины изменения его конечного спроса

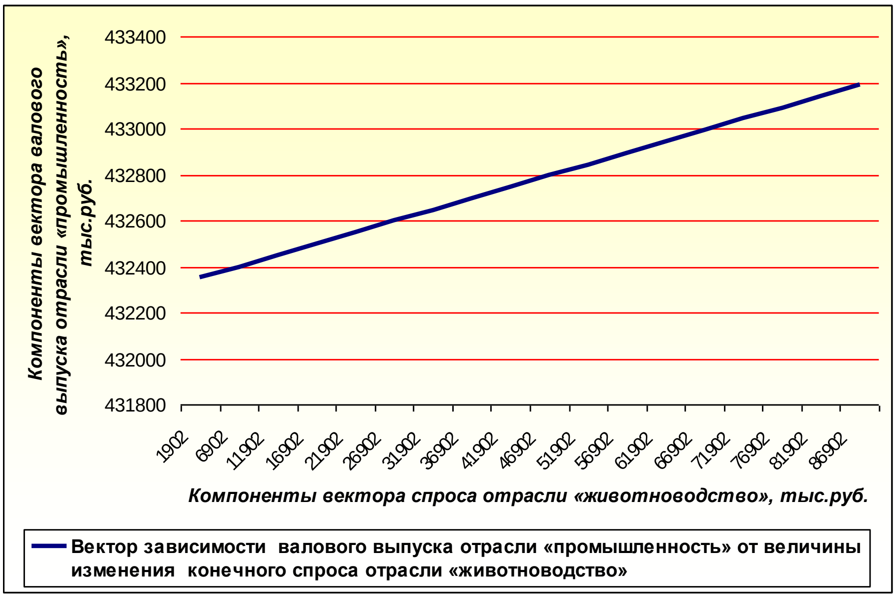

Рисунок 7 – График зависимости вектора валового выпуска отрасли «промышленность» от величины изменения конечного спроса отрасли «животноводство»

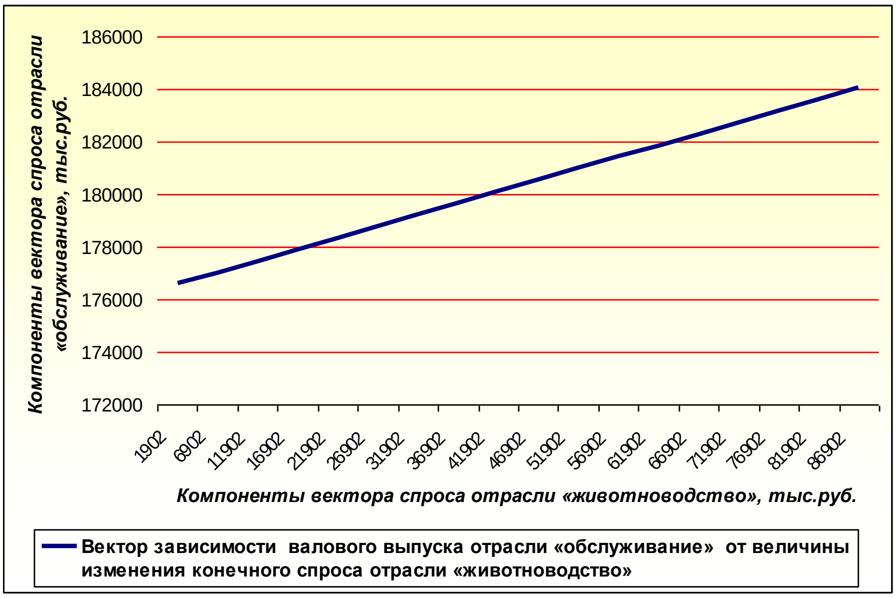

Рисунок 8 – График зависимости вектора валового выпуска отрасли «обслуживание» от величины изменения конечного спроса отрасли «животноводство»

3. Графики зависимостей x_1, x_2, x_3, x_4 от изменений b_3 (при $b_1 = 91774$ тыс. руб., $b_2 = 41902$ тыс. руб., $b_4 = 92266$ тыс. руб.), на рисунках 9-12:

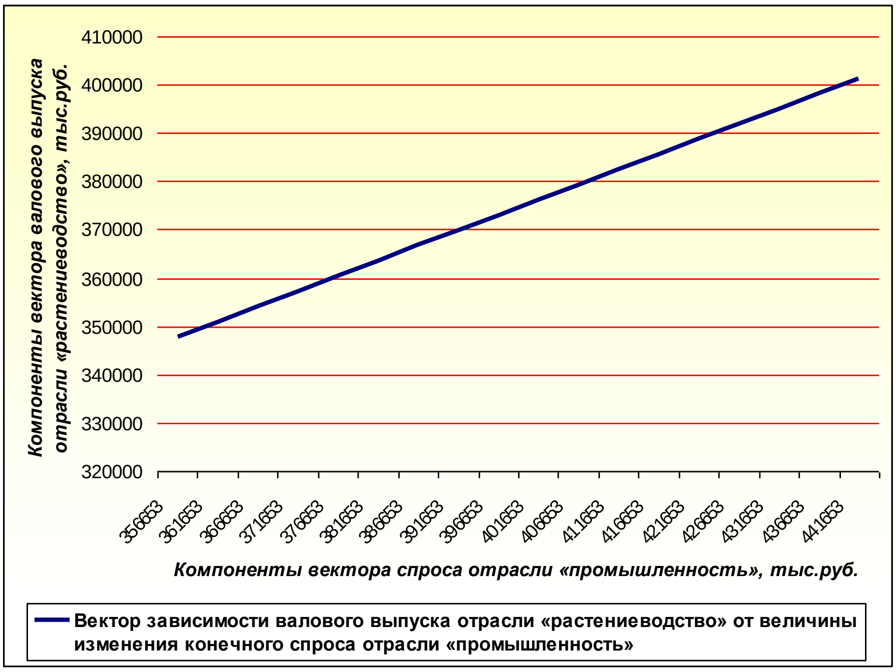

Рисунок 9 – График зависимости вектора валового выпуска отрасли «растениеводство» от величины изменения конечного спроса отрасли «промышленность»

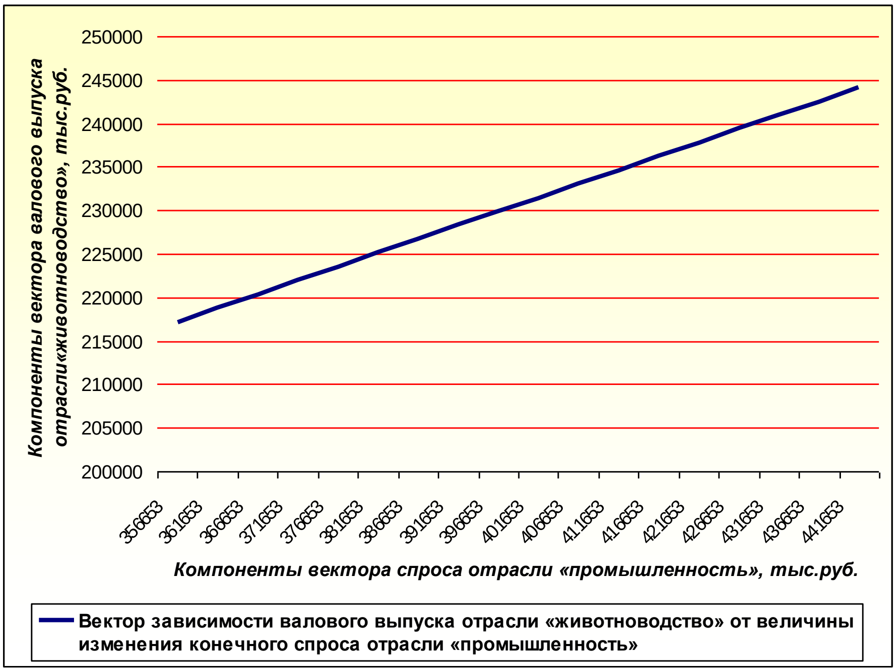

Рисунок 10 – График зависимости вектора валового выпуска отрасли «животноводство» от величины изменения конечного спроса отрасли «промышленность»

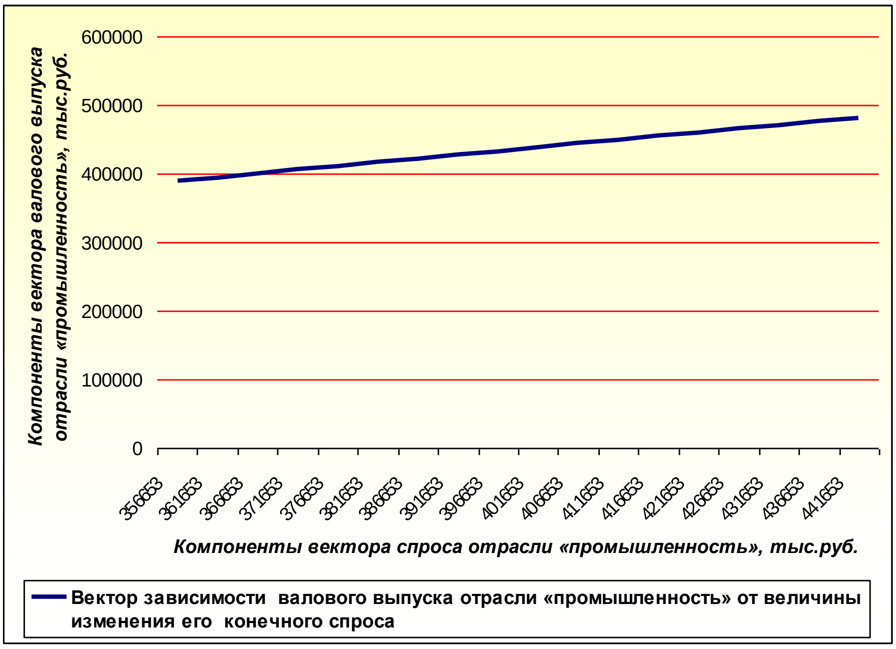

Рисунок 11 – График зависимости вектора валового выпуска отрасли «промышленность» от величины изменения его конечного спроса

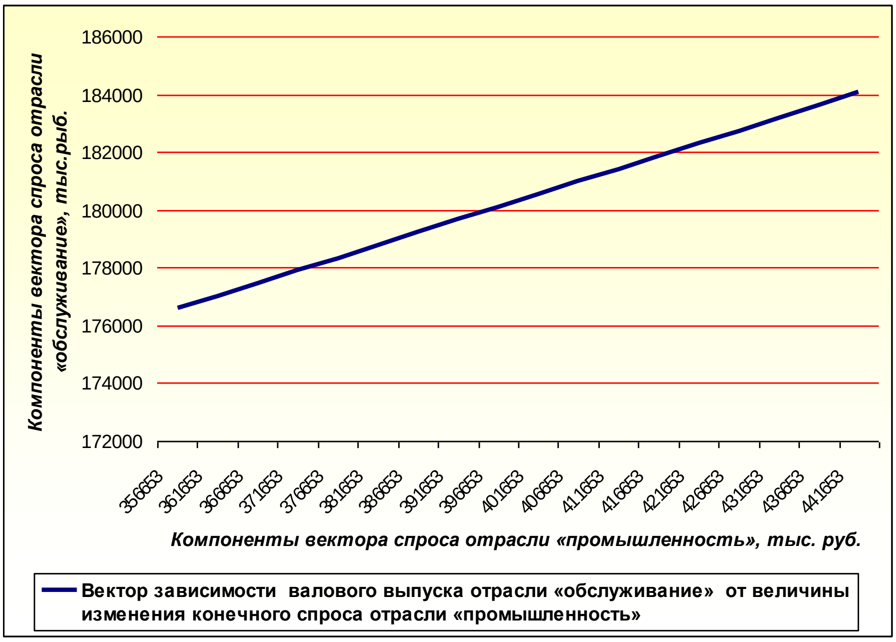

Рисунок 12 – График зависимости вектора валового выпуска отрасли «обслуживание» от величины изменения конечного спроса отрасли «промышленность»

4. Графики зависимостей x_1, x_2, x_3, x_4 от изменений b_4 (при $b_1 = 91774$ тыс. руб., $b_2 = 41902$ тыс. руб., $b_3 = 396653$ тыс. руб.), на рисунках 13-16:

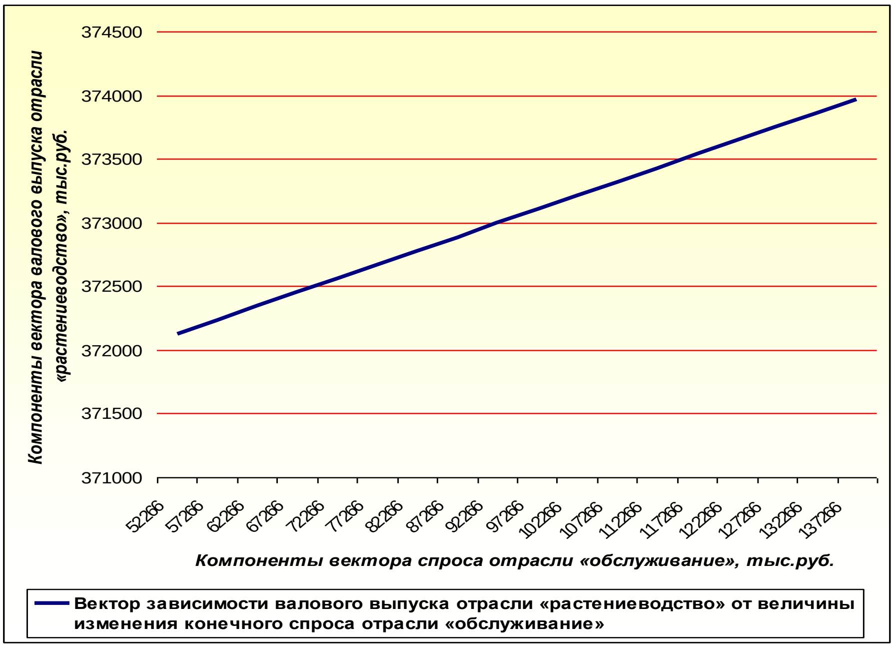

Рисунок 13 – График зависимости валового выпуска отрасли «растениеводство» от изменений величины конечного спроса отрасли «обслуживание»

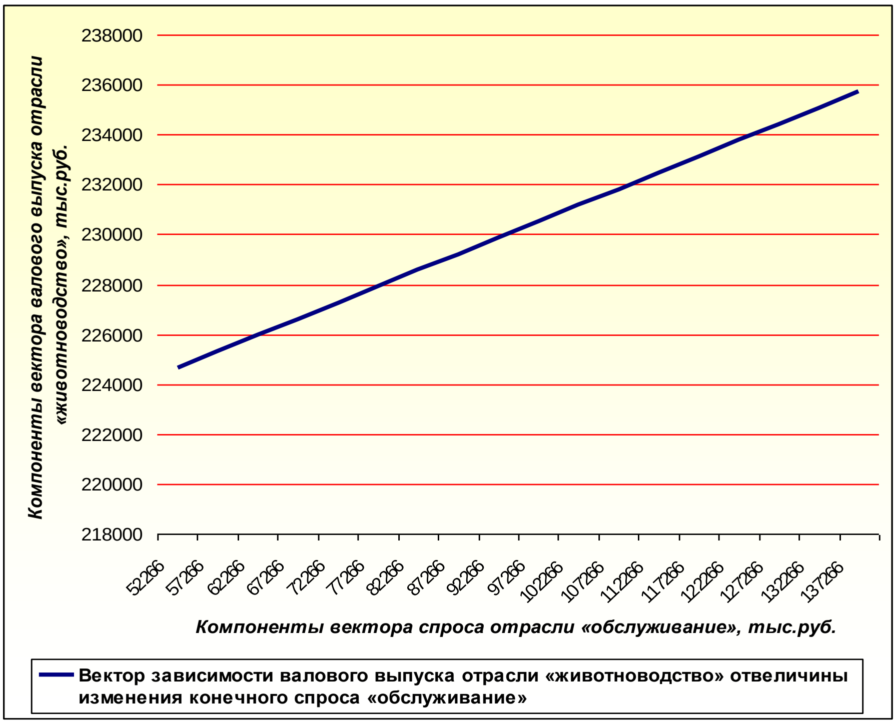

Рисунок 14 – График зависимости вектора валового выпуска отрасли «животноводство» от величины изменения конечного спроса «обслуживание»

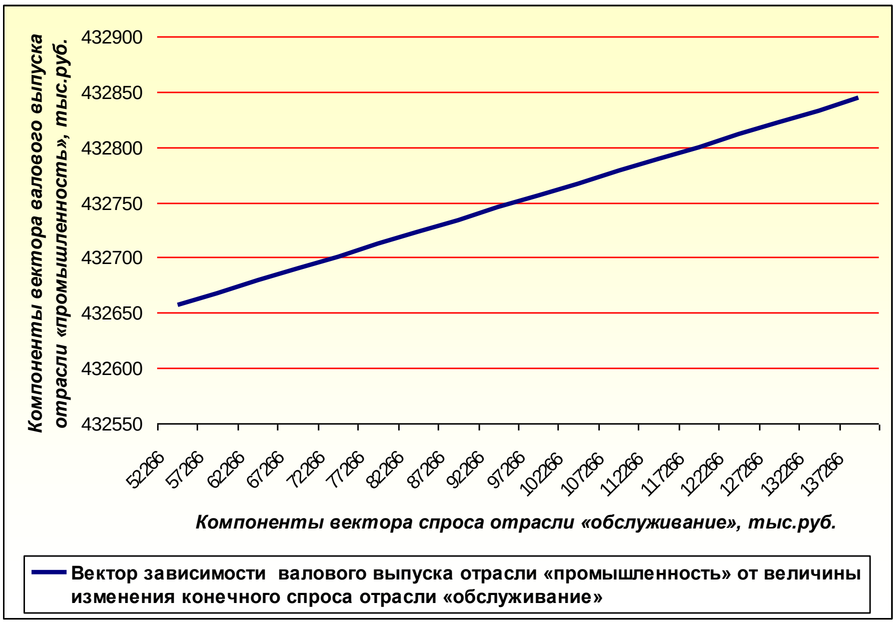

Рисунок 15 – График зависимости валового выпуска отрасли «промышленность» от величины изменения конечного спроса отрасли «обслуживание»

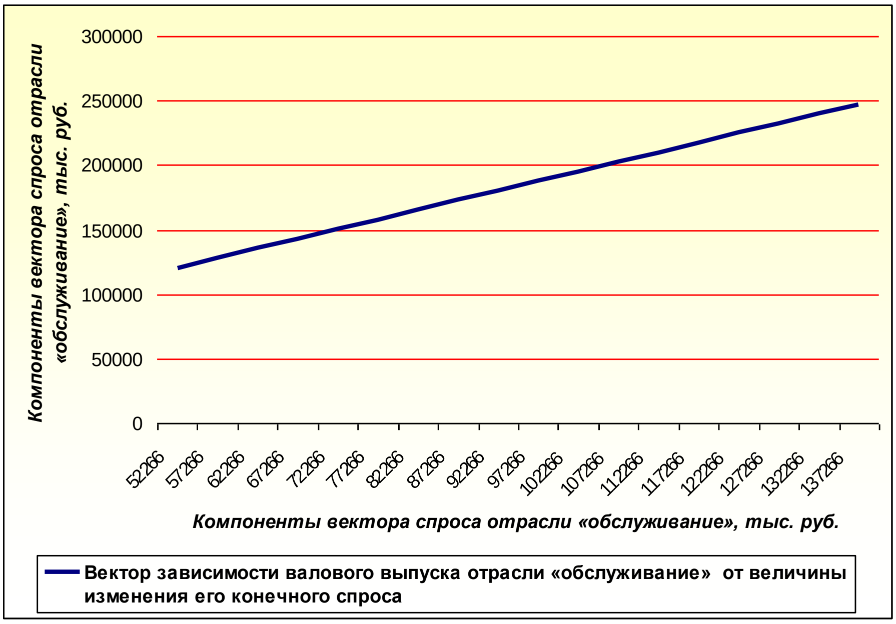

Рисунок 16 – График зависимости валового выпуска отрасли «обслуживание» от величины изменения его конечного спроса

Таким образом, построенная балансовая модель (на основе данных за 2002-2007 годы) агропромышленного комплекса Министерства сельского хозяйства, а также полученные результаты численного анализа продуктивности, результаты численного и приближенного решения этой модели позволили определить структурную взаимосвязь между отраслями производства и потребления.

На основе статистических данных за 2002-2007 годы приведённых в таблице 8 построена балансовая модель агропромышленного комплекса Министерства сельского хозяйства Карачаево-Черкесской республики.

На основе предложенной модели проведён численный анализ объемов производства сельскохозяйственной продукции отраслями: «растениеводство», «животноводство», «промышленность», «обслуживание» по агропромышленному комплексу Министерства сельского хозяйства Карачаево-Черкесской республики в зависимости от изменения спроса на продукцию этих отраслей.

Анализ балансовой модели сельскохозяйственного производства по агропромышленному комплексу Министерства сельского хозяйства Карачаево-Черкесской республики показывает (см. таблицы 9-11 и графики, приведённые на рисунках 1-16), что с ростом спроса b_1 на продукцию отрасли «растениеводство» объёмы производства отраслей «растениеводство» x_1, «животноводство» x_2, «промышленность» x_3 и «обслуживание» x_4 постоянно возрастают (рис. 1-4).

С ростом спроса b_2 на продукцию отрасли «животноводство» объёмы производства отраслей «растениеводство» x_1, «животноводство» x_2, «промышленность» x_3 и «обслуживание» x_4 постоянно возрастают (рис. 5-8).

С ростом спроса b_3 на продукцию отрасли «промышленность» объёмы производства отраслей «растениеводство» x_1, «животноводство» x_2, «промышленность» x_3 и «обслуживание» x_4 постоянно возрастают (рис. 9-12).

С ростом спроса b_4 на продукцию отрасли «обслуживание» объёмы производства отраслей «растениеводство» x_1, «животноводство» x_2, «промышленность» x_3 и «обслуживание» x_4 также постоянно возрастают (рис. 13-16).

2.2 Применение модели Леонтьева для анализа балансовой модели СХА (колхоз) «Кубань»

Статистические данные межотраслевого баланса сельскохозяйственного производства агропромышленного комплекса СХА (колхоз) «Кубань» Прикубанского района

Карачаево-Черкесской республики за 2002 год, представлены в таблице 13:

Таблица 13 – Таблица межотраслевого баланса двухотраслевой экономики агропромышленного комплекса СХА (колхоз) «Кубань» за 2002 год (тыс. руб.)

Производящие отрасли		Потребляющие отрасли		Конечный спрос	Валовой продукт
		1	2		
1	Растениеводство	2732	32	14865	17629
2	Животноводство	5	2165	6805	8975

Согласно этой таблице, по строкам рассматривается распределение продукции по отраслям. Из общего объема продукции на сумму 17629 тыс. руб. отрасли «растениеводство» распределяется: на сумму 2732 тыс. руб. – внутри самой отрасли, на 32 тыс. руб. – поставляется в отрасль «животноводство» и на 14865 тыс. руб. её продукции идет на внешнее потребление.

Из общего объема продукции на сумму 8975 тыс. руб. отрасли «животноводство» распределяется: на сумму 2165 тыс. руб. – внутри самой отрасли, на 5 тыс. руб. – поставляется в отрасль «растениеводство» и на 6805 тыс. руб. её продукции идет на внешнее потребление.

Аналогично статистические данные межотраслевого баланса сельскохозяйственного производства агропромышленного комплекса СХА (колхоз) «Кубань» Прикубанского района КЧР за 2003 год представлены в таблице 14:

Таблица 14 – таблица межотраслевого баланса двухотраслевой экономики агропромышленного комплекса СХА (колхоз) «Кубань» за 2003 год (тыс. руб.)

Производящие отрасли		Потребляющие отрасли		Конечный спрос	Валовой продукт
		1	2		
1	Растениеводство	2670	54	14503	17227
2	Животноводство	18	2230	7673	9921

за 2004 год – в таблице 15:

Таблица 15 – таблица межотраслевого баланса двухотраслевой экономики агропромышленного комплекса СХА (колхоз) «Кубань» за 2004 год (тыс. руб.)

Производящие отрасли		Потребляющие		Конечный спрос	Валовой продукт
		1	2		
1	Растениеводство	2499	46	13955	16500
2	Животноводство	0	2376	8861	11237

за 2005 год – в таблице 16:

Таблица 16 – таблица межотраслевого баланса двухотраслевой экономики агропромышленного комплекса СХА (колхоз) «Кубань» за 2005 год (тыс. руб.)

Производящие отрасли		Потребляющие отрасли		Конечный спрос	Валовой продукт
		1	2		
1	Растениеводство	2798	38	14588	17424
2	Животноводство	0	2542	11882	14424

и за 2006 год – в таблице 17:

Таблица 17 – таблица межотраслевого баланса двухотраслевой экономики агропромышленного комплекса СХА (колхоз) «Кубань» за 2006 год (тыс. руб.)

Производящие отрасли		Потребляющие отрасли		Конечный спрос	Валовой продукт
		1	2		
1	Растениеводство	3990	35	19330	23355
2	Животноводство	0	3292	8991	12283

за 2007 год, таблицы 18.

Таблица 18 – таблица межотраслевого баланса двухотраслевой экономики агропромышленного комплекса СХА (колхоз) «Кубань» за 2007 год (тыс. руб.)

Производящие отрасли		Потребляющие отрасли		Конечный спрос	Валовой продукт
		1	2		
1	Растениеводство	3222	40.5	17007	20269.7
2	Животноводство	5.1	2276	9723.8	12504.8

С учетом данных таблиц 14-18, составим таблицу их усредненных значений (см. таблицу 19).

Таблица 19 – таблица межотраслевого баланса двухотраслевой экономики агропромышленного комплекса СХА (колхоз) «Кубань» за 2002-2007 годы, построенная по усредненным значениям данных таблиц 14-18 (тыс. руб.)

Производящие отрасли		Потребляющие отрасли		Конечный спрос	Валовой продукт
		1	2		
1	Растениеводство	2937.8	41	15448.2	18427
2	Животноводство	4.6	2521	8842.4	11368

На основе таблицы 19 построим матрицу продуктивности (по методике, описанной в главе I):

$$A = \begin{pmatrix} 0.159 & 0.002 \\ 0.0004 & 0.222 \end{pmatrix}, \qquad (2.2.1)$$

Используя матрицу продуктивности (2.2.1) и задавшись вектором спроса

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \qquad (2.2.2)$$

на продукцию сельскохозяйственного производства агропромышленного комплекса СХА (колхоз) «Кубань» Прикубанского района Карачаево-Черкесской республики, можно легко рассчитать с помощью разработанного программного продукта «Комплекс программ «Balance» (описание см. в п. 3.1. глава III) вектор валового выпуска

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad (2.2.3)$$

сельскохозяйственной продукции агропромышленного комплекса СХА (колхоз) «Кубань» Прикубанского района Карачаево-Черкесской республики на ближайшие годы вперед.

Легко понять, что при изменении компонента b_1, b_2 на интервале $[0, \infty)$ вектора спроса (2.2.2) будут изменяться на этом интервале компоненты x_1, x_2 вектора валового выпуска (2.2.3) (это легко следует из соотношения $x = (E - A)^{-1} b$). Этот факт указывает на то, что x является вектор-функцией переменных b_1, b_2, т.е.

$$x_1 = f_1(b_1\, b_2),\ x_2 = f_2(b_1\, b_2). \qquad (2.1.10)$$

Задавшись одной из переменных b_i, $i = 1, 2$ и фиксируя остальные переменные, легко проследить изменения значений x_1, x_2 в зависимости от изменения значений переменной b_i на интервале $[0, \infty)$. Таблицы некоторых таких зависимостей, приведены в таблицах 20, 21, а их графики, полученные с помощью разработанного программного продукта «Комплекс программ «Balance» (описание см. в п. 3.1. глава III) и построенные с помощью программы Microsoft Office Excel приведены на рисунках 40-44.

Таблица 20 – зависимость x_1, x_2 от изменений b_1 (при $b_2 = 8842.4$ тыс. руб.) (тыс. руб.)

Значение конечного спроса отрасли «растениеводство» b_1	x_1	x_2
10448	12464.4	11058.7
15448	18416.8	11061.7
20448	24369.2	11064.7
25448	30321.6	11067.7
30448	36274	11071
35448	42226.4	11073.6
40448	48178.8	11076.6
45448	54131.1	11079.6
50448	60083.5	11082.5
55448	66035.9	11085.5
60448	71988.3	11088.5
65448	77940.7	11091.5
70448	83893	11094
75448	89845	11097
80448	95797.9	11100.4

Таблица 21 – зависимость x_1, x_2 от изменений b_2 (при $b_1 = 15448.2$ тыс. руб.) (тыс. руб.)

Значение конечного спроса отрасли «животноводство» b_2	x_1	x_2
3842	18401.9	4811.7
8842	18416.8	11061.7
13842	18431.7	17311.7
18842	18446.6	23561.7
23842	18461.5	29811.7
28842	18476.3	36061.7
33842	18491.2	42311.7
38842	18506	48561.8
43842	18521	54811.8
48842	18535.9	61061.8
53842	18550.7	67311.8
58842	18565.6	73561.8
63842	18580.5	79811.8
68842	18595.4	86061.8
73842	18610.3	92311.8

1. Графики зависимостей x_1, x_2 от изменений b_1 (при $b_2 = 8842.4$ тыс. руб.), на рисунках 17,18:

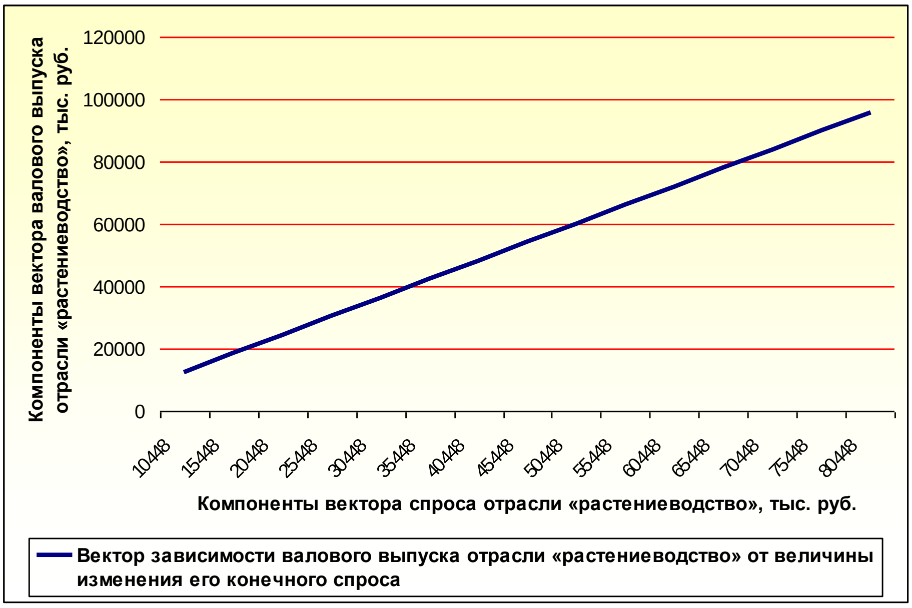

Рисунок 17 – График зависимости валового выпуска отрасли «растениеводство» от величины изменения его конечного спроса

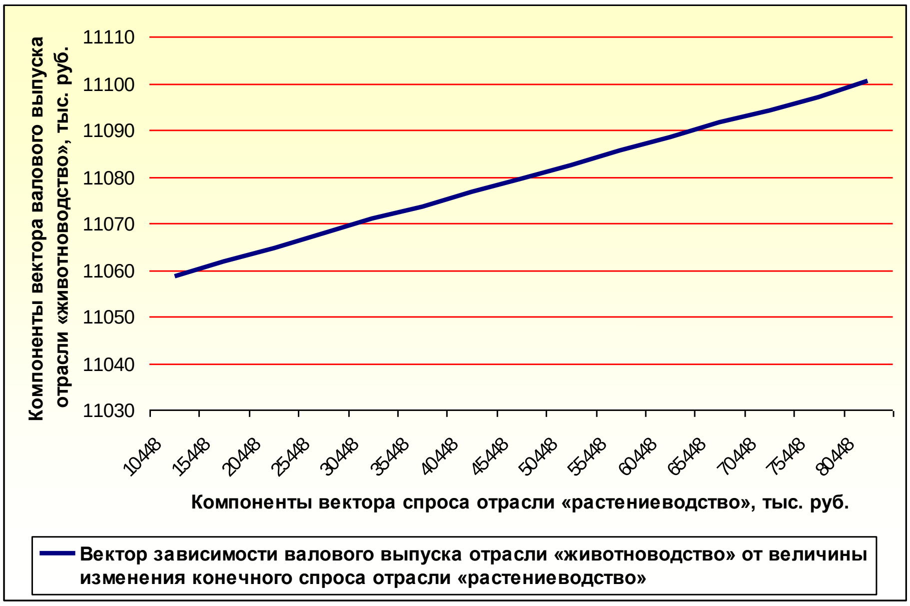

Рисунок 18 – График зависимости валового выпуска отрасли «животноводство» от величины изменения конечного спроса отрасли «растениеводство»

2. Графики зависимостей x_1, x_2 от изменений b_2 (при $b_1 = 15488.2$ тыс. руб., $b_2 = 8842.4$ тыс. руб.), на рисунках 19, 20:

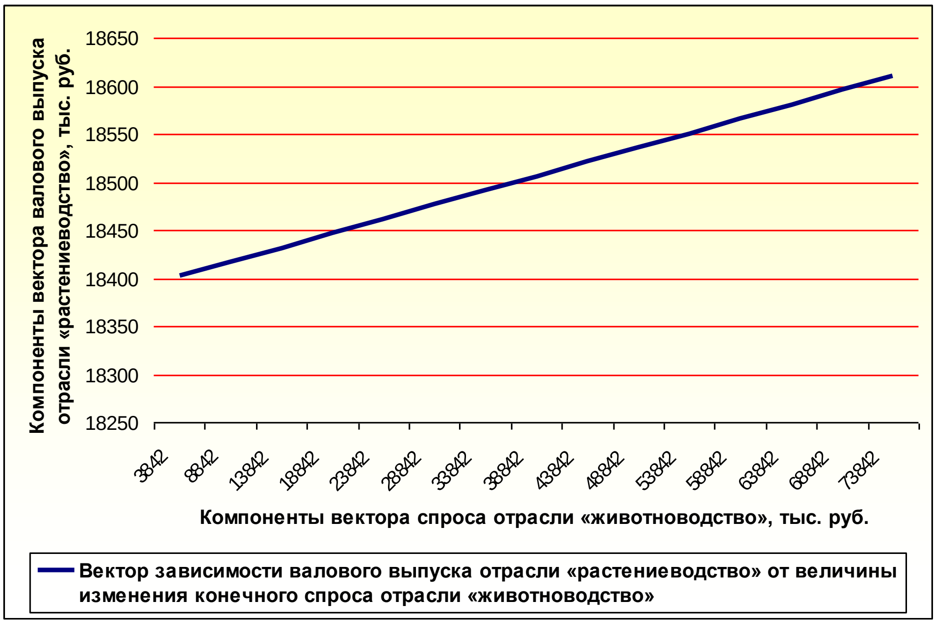

Рисунок 19 – График зависимости вектора валового выпуска отрасли «растениеводство» от величины изменения конечного спроса отрасли «животноводство»

Рисунок 20 –График зависимости вектора валового выпуска отрасли «животноводство» от величины изменения его конечного спроса

Таким образом, построенная балансовая модель (на основе данных за 2002-2007 годы) агропромышленного комплекса СХА (колхоз) «Кубань» Прикубанского района, а также полученные результаты численного анализа продуктивности, результаты численного и приближенного решения этой модели позволили определить структурную взаимосвязь между отраслями производства и потребления.

На основе статистических данных за 2002-2007 годы, приведённых в таблице 19 построена балансовая модель агропромышленного комплекса СХА (колхоз) «Кубань».

На основе предложенных моделей проведён численный анализ объемов производства сельскохозяйственной продукции отраслями «растениеводство», «животноводство» по агропромышленному комплексу СХА (колхоз) «Кубань» в зависимости от изменения спроса на продукцию этих отраслей.

Анализ балансовой модели сельскохозяйственного производства, по агропромышленному комплексу СХА (колхоз) «Кубань» показывает (см. таблицы 20-21 и графики, приведённые на рисунках 17-20), что с ростом спроса b_1 на продукцию отрасли «растениеводство» объёмы производства этой отрасли x_1 и отрасли «животноводство» x_2 постоянно возрастают (рис. 17,18).

С ростом спроса b_2 на продукцию отрасли «животноводство» x объёмы производства отраслей «растениеводство» x_1 и «животноводство» x_2 также постоянно возрастают (рис. 19,20).

2.3 Применение модели Леонтьева-Форда для анализа балансовой модели ООО «Фактор»

Усредненные статистические данные межотраслевого баланса в ООО «Фактор» г. Черкесска Карачаево-Черкесской Республики за 2005-2007 годы приведены в таблице 22:

Таблица 22 – Таблица межотраслевого баланса двух-отраслевой экономики ООО «Фактор» г. Черкеска Карачаево-Черкесской республики за 2005-2007 годы (тыс. руб.)

Производящая отрасль	Потребляющие отрасли		Затраты на уничтожение вредных отходов	Конечный спрос	Валовой продукт
	1	2			
Производство лакокрасочных изделий	15942.2	3544	70	30239.7	49795.9
Производство емкостей для краски	72	706	50	4068	4896

Согласно этой таблице, по строкам рассматривается распределение продукции ООО «Фактор» по цехам:

Из общего объема продукции на сумму 49795.9 тыс. руб. цеха по производству «лакокрасочных изделий» распределяется: на сумму 15942.2 тыс. руб. – внутри самого цеха, на 3544 тыс. руб. – поставляется в цех для производства «емкостей для краски», на 70 тыс. руб. составляют выбросы вредных отходов, возникающих в процессе производства и на 30239.8 тыс. руб. её продукции идет на внешнее потребление.

Из общего объёма продукции на сумму 4896 тыс. руб. цеха по производству «емкостей для краски» распределяется: на сумму 706 тыс. руб. – внутри самого цеха, на 72 тыс. руб. – поставляется в цех для производства «лакокрасочных изделий», на 50 тыс. руб. составляют выбросы вредных отходов, возникающих в процессе производства и на 4068 тыс. руб. её продукции идет на внешнее потребление.

Из общего объёма «загрязнителя» на сумму 120 тыс. руб. приходится: на 70 тыс. руб. для цеха по производству «лакокрасочных изделий», 50 тыс. руб. для цеха по производству «емкостей для краски».

На основе таблицы 22 построим матрицы (по методике, описанной в главе I):

$$A_{11}=\begin{pmatrix}0.32 & 0.07\\ 0.01 & 0.1\end{pmatrix},\ A_{12}=\begin{pmatrix}0.6\\ 0.4\end{pmatrix},\ A_{21}=\begin{pmatrix}0.001 & 0.01\end{pmatrix},\ A_{22}=(0). \quad (3.3.1)$$

Легко понять, что при изменении компонентов векторов b_1, b_2 на интервале $[0,\infty)$ будут изменяться компоненты векторов x, y.

Задавшись одной из переменных b_i, $i=1,2,3$ и фиксируя остальные переменные, легко проследить изменения значений x_1, x_2, y в зависимости от изменения значений переменной b_i на интервале $[0,\infty)$. Таблицы некоторых таких зависимостей приведены в таблицах 23-25, а их графики, полученные с помощью разработанного программного продукта «Комплекс программ «Balance» (описание см. в п. 3.1. глава III), построенные с помощью программы Microsoft Office Excel, приведены на рисунках 45-53.

Рассмотрим, каким должен быть валовой продукт предприятия, если изменить его конечный спрос.

Таблица 23 – Зависимость x_1, x_2, y от изменений b_1 (при $b_2=4068$ тыс. руб., $b_3=0$ тыс. руб.) (тыс. руб.)

Значение конечного спроса отрасли «производство лакокрасочных изделий» b_1	x_1	x_2	y
30239	45074.8	5063.4	95.7
30339	45222	5065	95.9
30439	45369.6	5066.8	96
30539	45516.9	5068.5	96.2
30639	45664.3	5070.2	96.4
30739	45811.7	5071.9	96.5
30839	45959	5073.6	96.7
30939	46253.8	5077	97
31039	46401.2	5078.8	97.2
31139	46548.6	5080.5	97.4
31239	46697	5082	97.5
31339	46843.4	5083.9	97.7
31439	46990.7	5085.6	97.8
31539	47138	5087.3	98
31639	47285.5	5089	98.2
31739	47432.9	5090.7	98.3

Таблица 24 – Зависимость x_1, x_2, y от изменений b_2 (при $b_1 = 30239$ тыс. руб., $b_3 = 0$ тыс. руб.) (тыс. руб.)

Значение конечного спроса отрасли «производство емкостей для краски» b_2	x_1	x_2	y
4068	45074.8	5063.4	95.7
4168	45087.3	5 175	96.8
4268	45099.7	5286.9	98
4368	45112	5398.6	99
4468	45124.8	5510.4	100
4568	45137	5622	101.4
4668	45149.8	5733.9	102.5
4768	45162.3	5845.6	103.6
4868	45174.8	5957.4	104.7
4968	45187.3	6069	105.9
5068	45199.8	6180.9	107
5168	45212.3	6292.6	108
5268	45224.8	6404.4	109.3
5368	45237.3	6516	110.4
5468	45249.8	6627.8	111.5
5568	45262.3	6739.6	112.7

Таблица 25 – Зависимость x_1, x_2, y от изменений b_3 (при $b_1 = 30239$ тыс. руб., $b_2 = 4068$ тыс. руб.) (тыс. руб.)

Величина остаточного уровня вредных отходов b_3	x_1	x_2	y
0	45074.8	5063.4	95.7
100	45168	5109	196
200	45261.7	5154.8	296.8
300	45355.1	5200.6	397.4
400	45448.5	5246.3	497.9
500	45541.9	5292	599
600	45635.4	5337.7	699
700	45728.8	5383.5	799.6
800	45822	5429	900
900	45915.7	5474.9	1000.7
1000	46009	5520.6	1101
1100	46102.5	5566.4	1201.8
1200	46195.9	5612	1302
1300	46289	5657.8	1402.9
1400	46382.8	5703.6	1503.4
1500	46476	5749	1603.9

1. Графики зависимостей x_1, x_2, y от изменений b_1 (при $b_2 = 4068$ тыс. руб., $b_3 = 0$ тыс. руб.) приведены на рисунках 21-23:

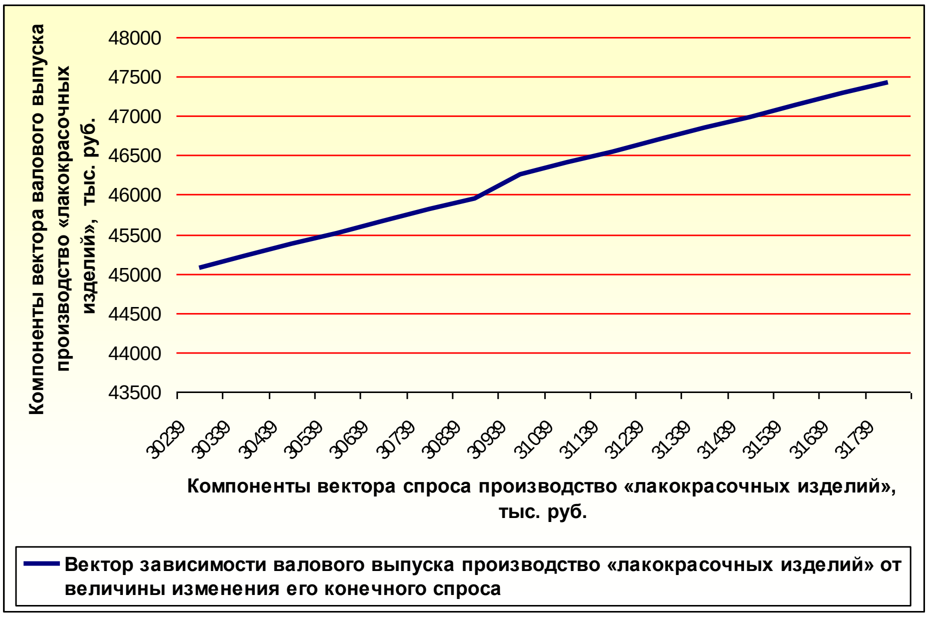

Рисунок 21 – График зависимости вектора валового выпуска производство «лакокрасочных изделий» от величины изменения его конечного спроса

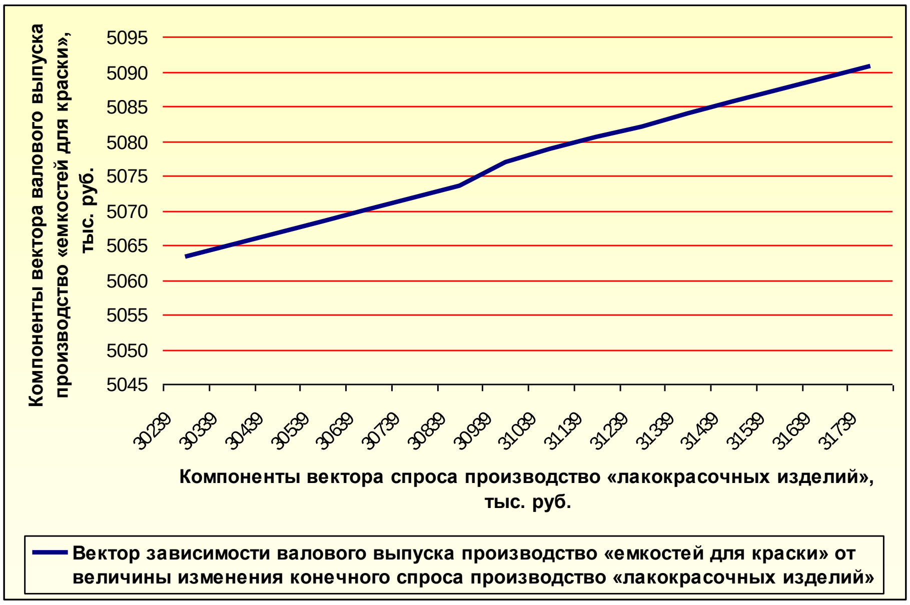

Рисунок 22 – График зависимости вектора валового выпуска производство «емкостей для краски» от величины изменения конечного спроса производство «лакокрасочных изделий»

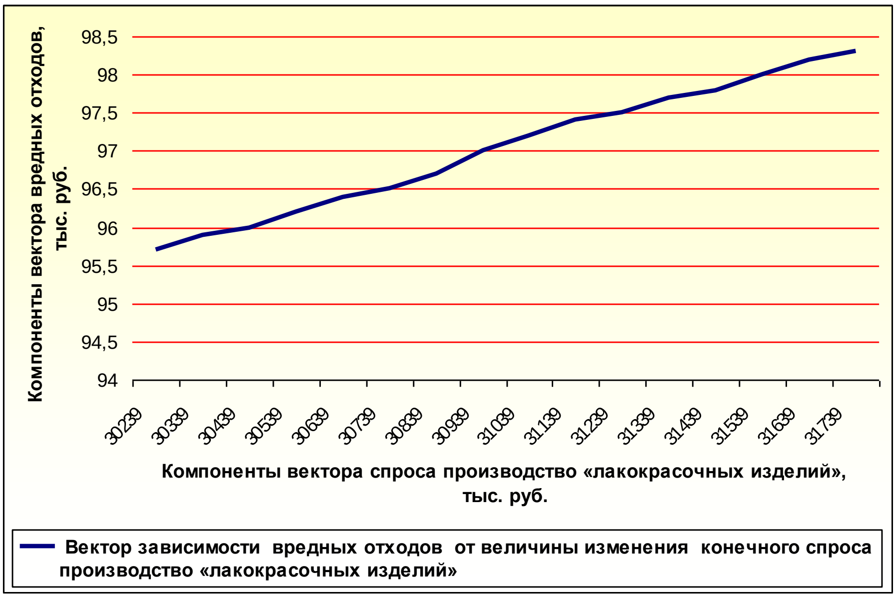

Рисунок 23 – График зависимости вектора вредных отходов от величины изменения конечного спроса производство «лакокрасочных изделий»

2. Графики зависимостей x_1, x_2, y от изменений b_2 (при $b_1 = 30239$ тыс. руб., $b_3 = 0$ тыс. руб.), приведены на рисунках 24-26:

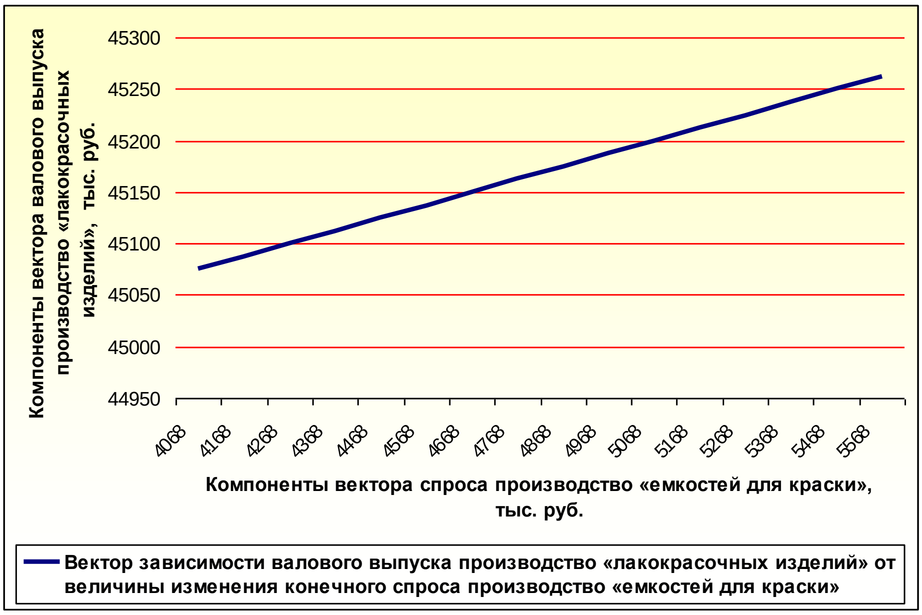

Рисунок 24 – График зависимости вектора валового выпуска производство «лакокрасочных изделий» от величины изменения конечного спроса производство «емкостей для краски»

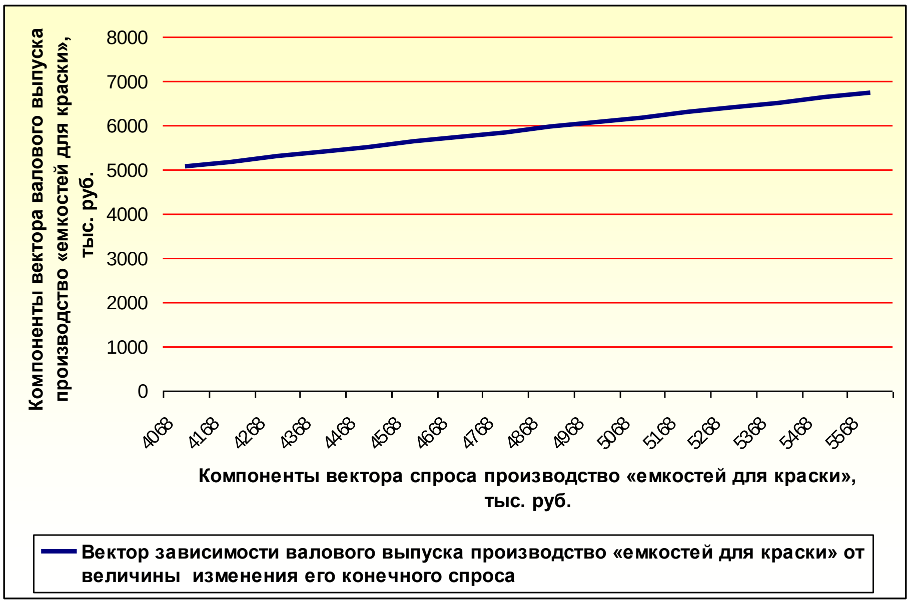

Рисунок 25 – График зависимости вектора валового выпуска производство «емкостей для краски» от величины изменения его конечного спроса

Рисунок 26 – График зависимости вектора вредных отходов от величины изменения конечного спроса производство «емкостей для краски»

3. Графики зависимостей x_1, x_2, y от изменений b_3 (при $b_1 = 30239$ тыс. руб., $b_2 = 4068$ тыс. руб.) приведены на рисунках 27-29:

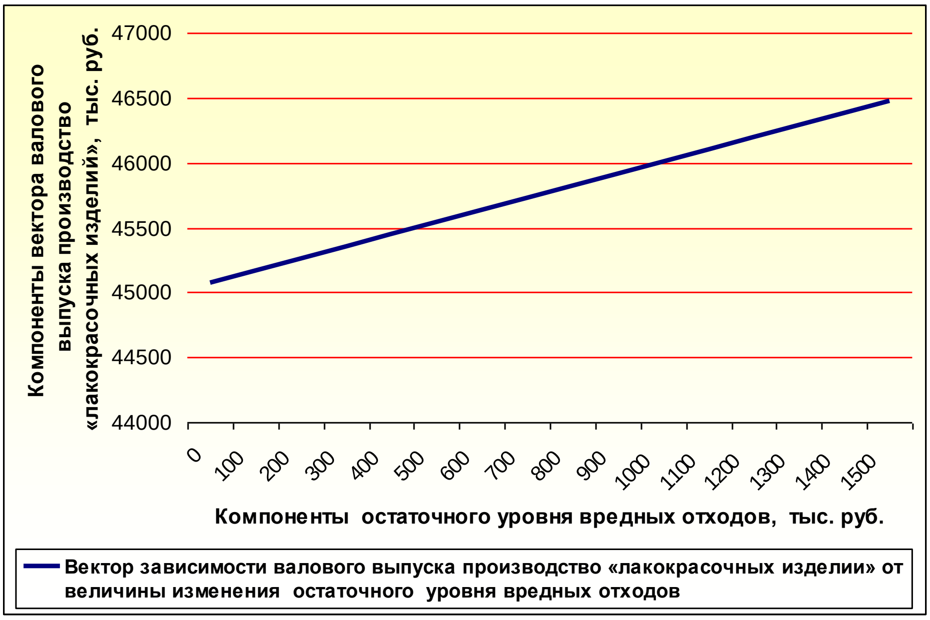

Рисунок 27 – График зависимости вектора валового выпуска производство «лакокрасочных изделий» от величины изменения остаточного уровня вредных отходов

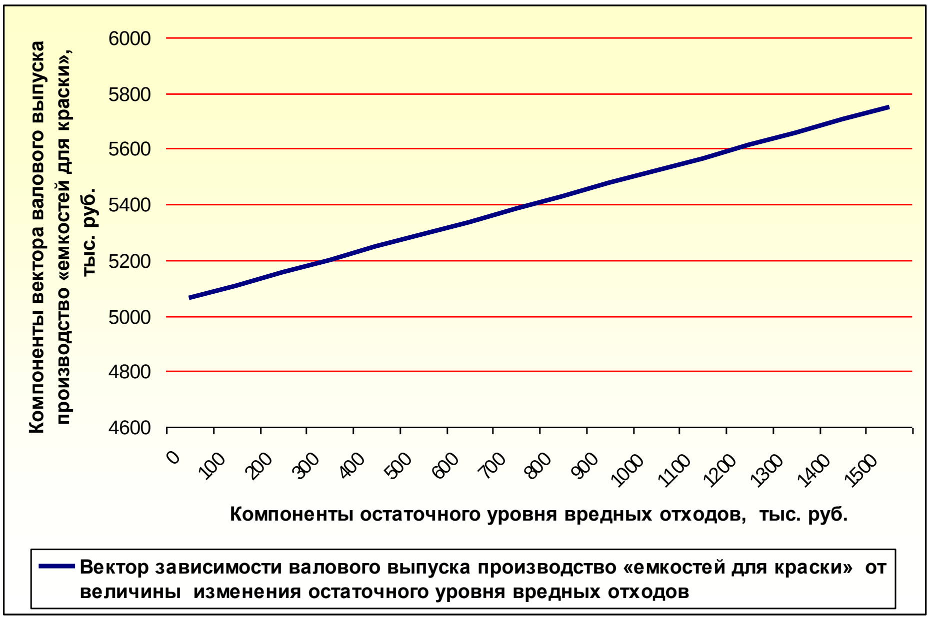

Рисунок 28 – График зависимости вектора валового выпуска производство «ёмкостей для краски» от величины изменения остаточного уровня вредных отходов

Рисунок 29 – График зависимости вредных отходов от величины изменения их остаточного уровня

Таким образом, построенная балансовая модель (на основе данных за 2005-2007 годы) ООО «Фактор» г. Черкесска, а также полученные результаты численного анализа продуктивности, результаты численного и приближенного решения этой модели позволили определить структурную взаимосвязь между отраслями производства и потребления.

На основе статистических данных за 2005-2007 годы, приведённых в таблице 22, построена балансовая модель ООО «Фактор» г. Черкесска.

На основе предложенной балансовой модели ООО «Фактор» г. Черкесска проведён численный анализ объемов его производства в зависимости от изменения спроса на его продукцию и количества вредных отходов производства. Анализ показывает (см. таблицы 23-25 и графики, приведённые на рисунках 21-29), что с ростом спроса b_1 на продукцию цеха по производству «лакокрасочных изделий» его объём x_1 и объем цеха по производству «емкостей для краски» x_2 постоянно возрастают (рис. 21, 22).

С ростом спроса b_2 на продукцию цеха по производству «лакокрасочных изделий» его объём x_1 и объем цеха по производству «емкостей для краски» x_2 также постоянно возрастают (рис. 23, 26).

Аналогично с ростом количества вредных отходов производства b_3 возрастают объемы производства x_1 – цеха по производству «лакокрасочных изделий» и x_2 – цеха по производству емкостей для краски.

В данной главе с помощью разработанных и зарегистрированных автором программных продуктов «Комплекс программ “Balance”», «Комплекс программ “The productivity of model”» проведен численный анализ предложенных балансовых моделей некоторых хозяйствующих субъектов Карачаево-Черкесской Республики.

Контрольные вопросы и задания

1. Приведите необходимые и достаточные условия продуктивности модели Леонтьева?
2. Какими методами удобно и целесообразно находить решение модели Леонтьева, если она имеет единственное неотрицательное решение?
3. Как выяснить, устойчиво ли решение модели Леонтьева относительно начальных условий?
4. Что позволяет найти описанная методика построения неотрицательного решения модели Леонтьева-Форда?
5. Что позволяет найти описанная методика построения неотрицательного решения модели Леонтьева-Форда, учитывающей утилизацию вредных отходов?

ГЛАВА III. МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ В БАЛАНСОВЫХ МОДЕЛЯХ

3.1 Построение неотрицательного решения в балансовой модели Леонтьева

Рассмотрим модель Леонтьева:

$$x = Ax + f,\ x \geq 0, \tag{3.1.1}$$

где $A = (a_{ij})$ – матрица с неотрицательными элементами размера $n \times n$, $x \in R_+^n$ – вектор валового выпуска продукта, называемого полезным; $R_+^n = \{col(x_1, \ldots, x_n):\ \ x_i \in [0, \infty),\ \ i = 1,2,\ldots,n\}$; f, $f \geq \theta$, – вектор размерности n, характеризующий объем выпуска полезного продукта; θ – нуль вектор-столбец размерности n.

При построении решения модели Леонтьева (3.1.1) возникают следующие важные вопросы:

1. Является ли модель Леонтьева (3.1.1) продуктивной?
2. Если модель Леонтьева (3.1.1) продуктивна, то имеет ли она единственное решение?
3. Если модель имеет единственное неотрицательное решение, то удобно и целесообразно ли находить это решение аналитическими методами?
4. Если модель Леонтьева имеет единственное неотрицательное решение и это решение нецелесообразно находить аналитическими методами, то удобно ли для этого использовать приближенные методы? Для ответа на этот вопрос необходимо предварительно выяснить, устойчиво ли решение модели (3.1.1) относительно начальных условий?

Если $(I - A)^{-1}$ существует, то модель (3.1.1) можно представить в виде:

$$x = (I - A)^{-1} f\ . \tag{3.1.2}$$

Нас интересуют только неотрицательные решения $x \geq 0$. Поскольку $f \geq 0$, то для получения неотрицательного решения по формуле (3.1.2) необходимо и достаточно, чтобы $(I - A)^{-1} \geq 0$. Известно [15], что $(I - A)^{-1}$ существует и неотрицательна, если все главные миноры матрицы $(I - A)$ положительны (условие Хокинса-Саймана).

$$1-a_{11}>0,\ \begin{vmatrix}1-a_{11} & -a_{12}\\ -a_{21} & 1-a_{22}\end{vmatrix}>0,\ \begin{vmatrix}1-a_{11} & -a_{12} & -a_{13}\\ -a_{21} & 1-a_{22} & -a_{23}\\ -a_{31} & -a_{32} & 1-a_{33}\end{vmatrix}>0,\dots$$

$$\dots,\begin{vmatrix}1-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \dots & -a_{1n}\\ -a_{21} & 1-a_{22} & -a_{23} & \dots & -a_{2n}\\ -a_{31} & -a_{32} & 1-a_{33} & \dots & -a_{3n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \dots & 1-a_{nn}\end{vmatrix}>0.$$

Пусть $\lambda_i,\ \ i=1,2,\dots,n$ – собственные числа матрицы A из (3.1.2), $\rho(A)=\max\limits_i\{|\lambda_i|\}$, где число $\rho(A)$ – спектральный радиус матрицы A.

Известно [6, 10, 19, 25, 30], что модель (3.1.2), имеющая неразложимую матрицу A продуктивна, т.е. имеет неотрицательное решение $x\geq 0$ тогда и только тогда, когда

$$\rho(A)<1. \tag{3.1.3}$$

Предлагается следующий алгоритм построения неотрицательного решения x системы (3.1.2) инструментальными средствами.

1. Ввести в базу данных элементы неразложимой матрицы A.
2. Ввести в базу данных компоненты вектора $f=\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\\ \dots\\ f_n\end{pmatrix}$.
3. Вычислить спектральный радиус матрицы $\rho(A)$.
4. Проверить выполнимость условия (3.1.3).
5. Если условие (3.1.3) выполняется, то вычислить обратную матрицу $(I-A)^{-1}$.
6. Найти неотрицательное решение $x=(I-A)^{-1}f$.

Данный алгоритм реализован в виде программного продукта «Комплекс программ «*Balance*» на языках программирования Delphi. Воспользуемся указанным программным продуктом для оценки валовых выпусков отраслей агропромышленного комплекса Министерства сельского хозяйства Карачаево-Черкесской республики.

Пример 1. Из регионов РФ на территорию Карачаево-Черкесской республики каждый год ввозится определенное количество сельскохозяйственной продукции. Некоторые виды ввезенной сельскохозяйственной продукции могли бы были быть выращены и переработаны сельскохозяйственными предприятиями Карачаево-Черкесской республики (например, зерно, сахарная свекла, подсолнечник и т.д.).

В 2005 году на территорию Карачаево-Черкесской республики из регионов РФ было ввезено продукции отрасли «растениеводство» на сумму 6130 тыс. руб.; продукции отрасли «животноводство» на сумму 62396 тыс. руб.; товаров промышленной переработки на сумму 97240.2 тыс. руб.

Некоторую часть ввозимой в республику продукции можно было бы произвести силами хозяйств республики.

Произведя расчеты для отрасли «растениеводство», для отрасли «животноводство» и отрасли «промышленность», получим:

- общая стоимость ввезенной продукции, которая могла бы быть произведена отраслью «растениеводство» агропромышленного комплекса министерства сельского хозяйства Карачаево-Черкесской республики, составила бы 53473.6 тыс. руб.;
- общая стоимость ввезенной продукции, которая могла бы быть произведена отраслью «животноводство» агропромышленного комплекса Министерства сельского хозяйства Карачаево-Черкесской республики, составила бы 62396 тыс. руб.;
- общая стоимость ввезенной продукции, которая могла бы быть произведена отраслью «промышленность», составила бы 62627.7 тыс. руб.

Таким образом, чтобы удовлетворить потребности населения Карачаево-Черкесской республики с учетом произведенных выше расчетов и с учетом конечного спроса агропромышленного комплекса Карачаево-Черкесской республики за 2005 год (см. таблицу 5), необходимо, чтобы конечный спрос отрасли «растениеводство» должен был быть равным 82330.6 тыс. руб., конечный спрос отрасли «животноводство» должен был быть равным 91752 тыс. руб., конечный спрос отрасли «промышленность» должен был быть равным 403819.7 тыс. руб., конечный спрос отрасли «обслуживание» должен был быть равным 20125 тыс. руб.

Требуется найти, какой должен был бы быть в этом случае валовой выпуск отраслей экономики агропромышленного комплекса Министерства сельского хозяйства Карачаево-Черкесской республики в 2005 году, который удовлетворил бы конечный спрос на эти виды продукции в республике.

Из таблицы межотраслевого баланса четырёхотраслевой экономики агропромышленного комплекса Министерства сельского хозяйства Карачаево-Черкесской республики (см. таблицу 5 из п. 2.1) получим матрицу затрат

$$A = \begin{pmatrix} 0.17 & 0.13 & 0.6 & 0.003 \\ 0 & 0.57 & 0.13 & 0.04 \\ 0.0009 & 0.003 & 0.08 & 0.0006 \\ 0.028 & 0.024 & 0.033 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

и вектор конечного спроса

$$f = \begin{pmatrix} 82330.6 \\ 91752 \\ 403819.7 \\ 20125 \end{pmatrix}.$$

Решая балансовую модель агропромышленного комплекса министерства сельского хозяйства Карачаево-Черкесской республики с помощью разработанного программного продукта «Комплекс программ «Balance» найдем вектор валового выпуска:

$$x = \begin{pmatrix} 473818.7 \\ 354227.7 \\ 441079 \\ 80641.4 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, агропромышленный комплекс Министерства сельского хозяйства Карачаево-Черкесской республики в 2005 году должен был бы произвести продукции:

- отраслью «растениеводство» – на сумму 473818.7 тыс. руб.;
- отраслью «животноводство» – на сумму 354227.7 тыс. руб.;
- отраслью «промышленность» – на сумму 441079 тыс. руб.;
- отраслью «обслуживание» – на сумму 80641.4 тыс. руб.

На самом деле было произведено:

- отраслью «растениеводство» – на сумму 284882 тыс. руб.;
- отраслью «животноводство» – на сумму 112652 тыс. руб.;
- отраслью «промышленность» – на сумму 371276 тыс. руб.;
- отраслью «обслуживание» – на сумму 32809 тыс. руб.

Это указывает на то, что в 2005 году производство продукции отрасли «растениеводство» должно было быть увеличено на сумму 188936 тыс. руб., отрасли «животноводство» – на сумму 241576 тыс. руб., отрасли «промышленность» – на сумму 69803 тыс. руб., отрасли «обслуживание» – на сумму 47832 тыс. руб.

По аналогии были произведены расчеты за 2006- 2007 годы:

Произведённый расчет за 2006 год (по аналогии с 2005 годом) показывает, что агропромышленный комплекс Министерства сельского хозяйства Карачаево-Черкесской республики в 2006 году должен был бы произвести продукции: отраслью «растениеводство» – на сумму 275276.6 тыс. руб.; отраслью «животноводство» – на сумму 122857.3 тыс. руб.; отраслью «промышленность» – на сумму 427781.8 тыс. руб.; отраслью «обслуживание» – на сумму 254287 тыс. руб. На самом деле было произведено отраслью «растениеводство» – на сумму 273463 тыс. руб.; отраслью «животноводство» – на сумму 120278 тыс. руб.; отраслью «промышленность» – на сумму 426979 тыс. руб.; отраслью «обслуживание» – на сумму 250633 тыс. руб. Это указывает на то, что производство продукции отрасли «растениеводство» должно было быть увеличено на сумму 1813 тыс. руб., отрасли «животноводство» – на сумму 2779 тыс. руб., отрасли «промышленность» – на сумму 802 тыс. руб., отрасли «обслуживание» – на сумму 3654 тыс. руб.

Произведённый расчет за 2007 год показывает, что агропромышленный комплекс Министерства сельского хозяйства Карачаево-Черкесской республики в 2007 году должен был произвести продукции: отраслью «растениеводство» – на сумму 374905 тыс. руб.; отраслью «животноводство» – на сумму 17027.6 тыс. руб.; отраслью «промышленность» – на сумму 437103 тыс. руб.; отраслью «обслуживание» – на сумму 116637 тыс. руб. На самом деле было произведено отраслью «растениеводство» – на сумму 372435 тыс. руб.; отраслью «животноводство» – на сумму 166458 тыс. руб.; отраслью «промышленность» – на сумму 436283 тыс. руб.; отраслью «обслуживание» – на сумму 114961 тыс. руб. Это указывает на то, что производство продукции отрасли «растениеводство» должно было быть увеличено на сумму 2470 тыс. руб., отрасли «животноводство» – на сумму

3569.6 тыс. руб., отрасли «промышленность» – на сумму 820 тыс. руб., отрасли «обслуживание» – на сумму 1676 тыс. руб.

Предположим, что конечный спрос отраслей агропромышленного комплекса Министерства сельского хозяйства Карачаево-Черкесской республики должен быть равным: отрасли «растениеводство» – на сумму 151413 тыс. руб.; отрасли «животноводство» – на сумму 134633 тыс. руб.; отрасли «промышленность» – на сумму 5047746 тыс. руб.; отрасли «обслуживание» – на сумму 68471 тыс. руб.

Используя усредненные данные за 2005-2007 годы и разработанный программный продукт «Комплекс программ «Balance» (см. описание ниже), получим валовой выпуск продукции, удовлетворяющий этот конечный спрос: отрасли «растениеводство» – на сумму 571740.4 тыс. руб.; отрасли «животноводство» – на сумму 482575.7 тыс. руб.; отрасли «промышленность» – на сумму 612548.6 тыс. руб.; отрасли «обслуживание» – на сумму 169971.7 тыс. руб.

Произведём анализ устойчивости получаемого решения модели Леонтьева к возмущению элементов матрицы A и вектора f. Представим модель Леонтьева (3.1.2) в виде:

$$(I-A)^{-1}x = f\,. \tag{3.1.4}$$

Для удобства обозначим $(I-A)^{-1} = B$. Тогда модель (3.1.4) примет вид:

$$Bx = f\,. \tag{3.1.5}$$

Устойчивость решения модели Леонтьева (3.1.5) к возмущениям в A и f означают, что относительно небольшие искажения элементов в A и f модели (3.1.5) должны привести к небольшим погрешностям результата решения $\tilde{x}$ этой модели. Обозначим через $\tilde{B}$ и $\tilde{f}$ возмущенные B и f в (3.1.5). Тогда (3.1.5) примет вид:

$$\tilde{B}\,\tilde{x} = \tilde{f}\,. \tag{3.1.6}$$

Пусть $\|\tilde{B}-B\| \le \xi$, $\|\tilde{f}-f\| \le \delta$, где ξ – погрешность матрицы $\tilde{B}$, δ – погрешность вектора $\tilde{f}$.

Таким образом, устойчивость модели (3.1.5) зависит от числа обусловленности матрицы B, а значит устойчивость (3.1.1) – от числа обусловленности A. Если матрица A модели хорошо обусловлена ($cond\,A \le 1000$), её решение устойчиво; в противном случае является неустойчивым.

Укажем алгоритм численного решения модели Леонтьева вида (3.1.1).

Будем строить её решение методом последовательных приближений:

$$x_{k+1} = Ax_k + f\,,\ x_0 = \theta\,,\ k = 0,1,2,\dots. \qquad (3.1.7)$$

Согласно [39], матрица A из (3.1.1) продуктивна, если норма этой матрицы $\|A\|$ меньше 1, т.е. $\|A\| < 1$.

Согласно [2], при выполнении условия $\|A\| < 1$ решение системы

$$x = Ax + f \qquad (3.1.8)$$

1) существует и единственно;

2) итерационный процесс (3.1.7) сходится при любом начальном приближении x_0 и справедлива оценка

$$\|x_k - x\| \le \|A\|\|x_0 - x\|, \qquad (3.1.9)$$

где x – решение (3.1.4).

Обратим внимание, что в (3.1.8) ограничение $x \ge 0$ отсутствует. Из указанных результатов [39] вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $\|A\|$ *из*

$$x = Ax + f \qquad (*)$$

удовлетворяет условию $\|A\| < 1$. *Тогда 1) решение системы (*) существует и единственно; 2) итерационный процесс* $x_{k+1} = Ax_k + f$, $x_0 = \theta$, $k = 0,1,2,\dots$ *сходится к неотрицательному решению* $\bar{x}$ *(системы (*)) и при любом начальном приближении* x_0 *имеет место оценка* $\|x_k - x\| \le \|A\|\|x_0 - x\|$.

Заметим, что при конечном n (т.е. в n-мерном вещественном пространстве) норма $\|A\|$ может быть задана разложимыми способами, например:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n+m} \sum_{i=1}^{n+m} |a_{ij}|,$$

$$\|A\|_2 = \max_{1 \le j \le n+m} \sum_{j=1}^{n+m} |a_{ij}|,$$

$$\|A\|_3 = \max_{i=\overline{1,n}} |\lambda_i|\cdot$$

На основании указанных результатов разработаны алгоритм построения устойчивого решения модели (3.1.1) и его программная реализация на языке Delphi в виде программного продукта «Комплекс программ «Balance».

1. Ввести матрицу A размерности $(n \times n)$.
2. Ввести векторы f размерности (n).
3. Задать начальное приближение x_0.
4. Задать погрешность $\varepsilon > 0$ для вычисления x.
5. Вычислить число обусловленности матрицы.
6. Если $cond\, A \le 1000$, то система имеет устойчивое решение, иначе система имеет неустойчивое решение.
7. Проверить выполнимость условия $\|A\| < 1$ (для выбранной нормы).
8. Если выполнены условия пунктов 6 и 7, то вычисления производить по формуле (3.1.7) до тех пор, пока не будет достигнута требуемая погрешность $\varepsilon > 0$.
9. Если условие пункта 7 не выполняется, то следует выбрать другую норму $\|A\|$.

Пример 2. Построим с помощью разработанного программного продукта «Комплекс программ «Balance» (см. описание ниже) решение балансовой модели агропромышленного комплекса Министерства сельского хозяйства Карачаево-Черкесской республики. Предварительный анализ этой модели показывает, что число обусловленности матрицы A равно 46.3, т.е. $cond\, A = 46.3 \le 1000$. Следовательно, матрица A хорошо обусловлена, и модель имеет устойчивое решение; вектор валового выпуска:

$$x = \begin{pmatrix} 571740.4 \\ 482575.7 \\ 612548.6 \\ 169971.7 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, отраслями агропромышленного комплекса Министерства сельского хозяйства Карачаево-Черкесской республики должно быть произведено валовой продукции, удовлетворяющей заданному конечному спросу: отраслью «растениеводство» – на сумму 571740.4 тыс. руб.; отраслью «животноводство» – на сумму 482575.7 тыс. руб.; отраслью «промышленность» – на сумму 612548.6 тыс. руб.; отраслью «обслуживание» – на сумму 169971.7 тыс. руб.

Приведем описание разработанного программного продукта «Комплекс программ «*Balance*» и воспользуемся ею для решения следующей задачи. Пусть агропромышленный комплекс Министерства сельского хозяйства Карачаево-Черкесской республики запланировал бы конечный спрос: отрасли «растениеводство» – на сумму 97939.5 тыс. руб., отрасли «животноводство» – на сумму 72236.4 тыс. руб., отрасли «промышленность» – на сумму 4985119.2 тыс. руб. и отрасли «обслуживание» – на сумму 68470.5 тыс. руб. Требуется найти вектор валового продукта.

Результаты решения и промежуточных вычислений приведены на рисунках 33-34, 39.

1. Запустим программу «Комплекс программ «Balance», дважды щелкнув на его пиктограмме мышью (как правило, эта пиктограмма находится на рабочем столе) (рис. 30).

Рисунок 30 – Пиктограмма программы

2. В меню **Файл** выберем команду **Новый** и щелкнем на ней мышью Откроется новое окно (рис. 31),

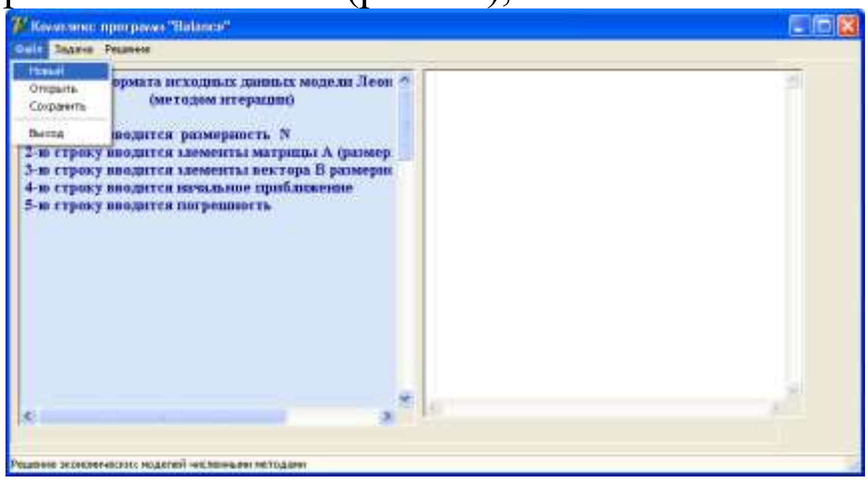

Рисунок 31– Создание нового документа

введем данные в следующей очередности (рис. 33):

– введем размерность $n = 4$,

– матрицу прямых затрат $A = \begin{pmatrix} 0.166 & 0.097 & 0.454 & 0.003 \\ 0.001 & 0.54 & 0.13 & 0.04 \\ 0.001 & 0.004 & 0.08 & 0.001 \\ 0.025 & 0.024 & 0.033 & 0.326 \end{pmatrix}$,

– вектор, характеризующий чистый выпуск полезного продукта
$$b = \begin{pmatrix} 97939.5 \\ 72236.4 \\ 498519.2 \\ 68470.5 \end{pmatrix},$$

– начальное значение вектора валового выпуска $x_0 = \begin{pmatrix} 97939.5 \\ 72236.4 \\ 498519.2 \\ 68470.5 \end{pmatrix}$,

– погрешность $\varepsilon = 0.01$.

Последовательность вводимых данных можно просмотреть в поле описания модели справа от поля ввода данных. При записях вещественных чисел вместо запятой надо применять точку.

Или если требуется ввести данные из уже существующего файла, то следует в пункте меню **Файл** выбрать команду **Открыть** и щелкнуть на ней мышью**.** На экране появится диалоговое окно **Открыть** (рис. 32)**.** В раскрывающемся списке **Папка** выберем диск, а затем папку, где хранится нужный нам файл, дважды щелкнем на имени выбранной папки мышью. Выделим файл, щелкнув мышью на нём (или откройте, дважды щелкнув мышью), после чего в поле **Имя файла** появится имя выделенного файла, щелкнем мышью на кнопке **Открыть**. В результате откроется выбранный файл, необходимый для дальнейшей работы.

Рисунок 32 – Диалоговое окно открытия документа

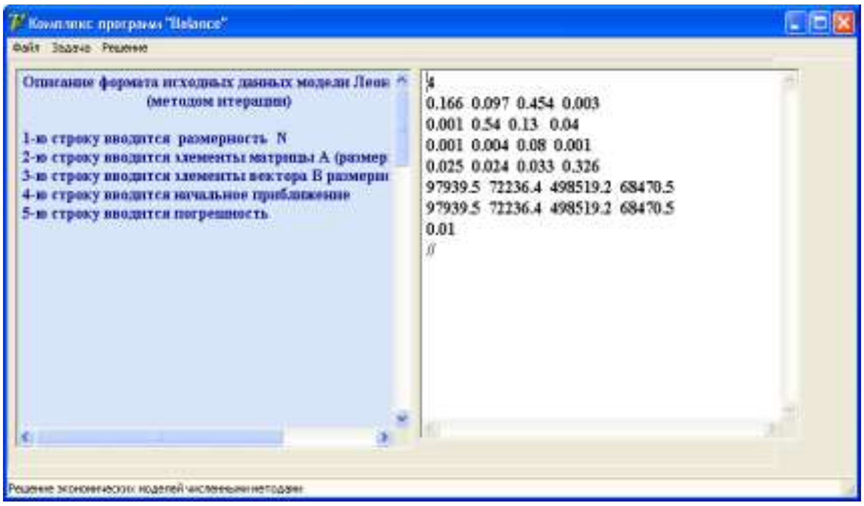

Рисунок 33 – Ввод данных для решения задачи модели Леонтьева

5. В пункте меню **Файл** выберем команду **Сохранить** (рис. 34) и щелкнем на ней мышью. Окно ввода данных исчезнет.

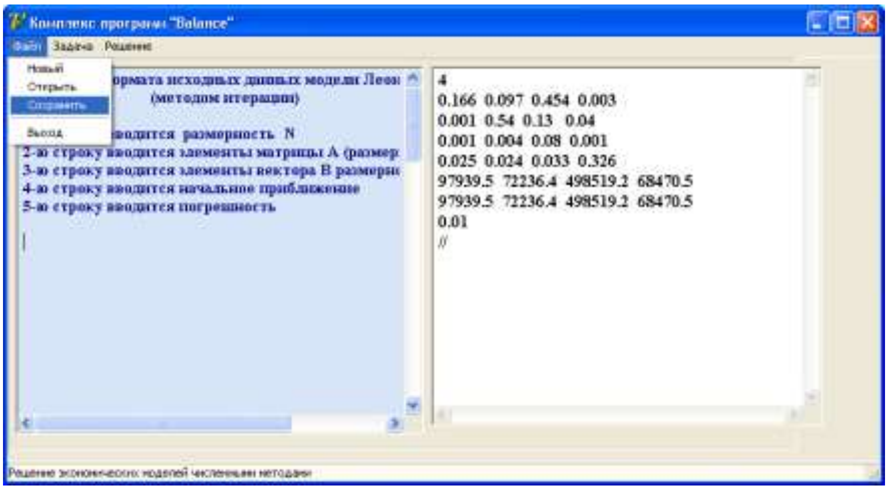

Рисунок 34 – Сохранение введенных данных

6. В пункте меню **Задача** выберем метод решения (метод итераций модели Леонтьева) и щелкнем на ней мышью (рис. 35).

7. На экране появится диалоговое окно с сообщением «*Решение задачи завершено!*» (рис. 36). Щелкните кнопку **ОК** мышью. (Если модель имеет неположительное решение (т.е. она непродуктивна), то в этом случае на экране появляется диалоговое окно с сообщением «*модель расходится*» (рис. 37)).

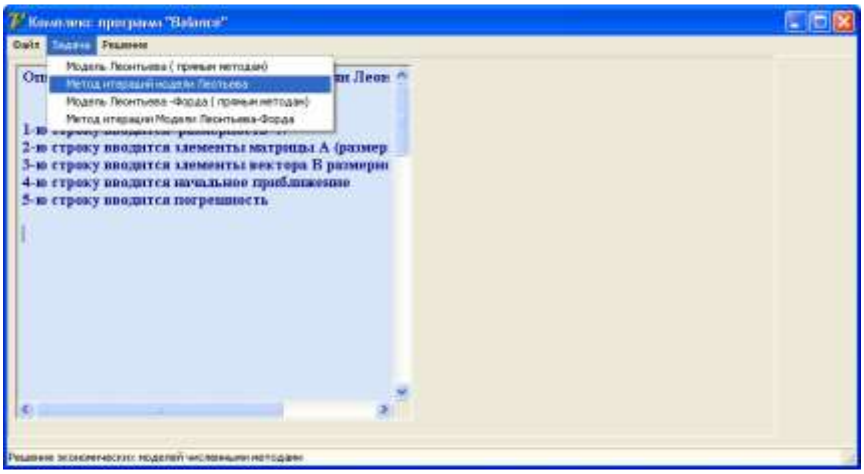

Рисунок 35 – Выбор модели и метода его решения

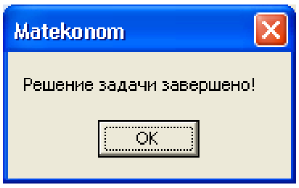

Рисунок 36 – Сообщение о завершении работы

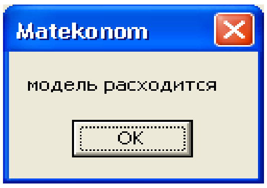

Рисунок 37 – Сообщение о расхождении модели

7. Для просмотра результатов решения выберем в пункте меню **Решение** команду **Просмотреть решение** (рис. 38) и щелкнем на ней мышью. Результаты полученных решений показаны (рис. 39).

Рисунок 38 – Выбор команды **Просмотреть решение**

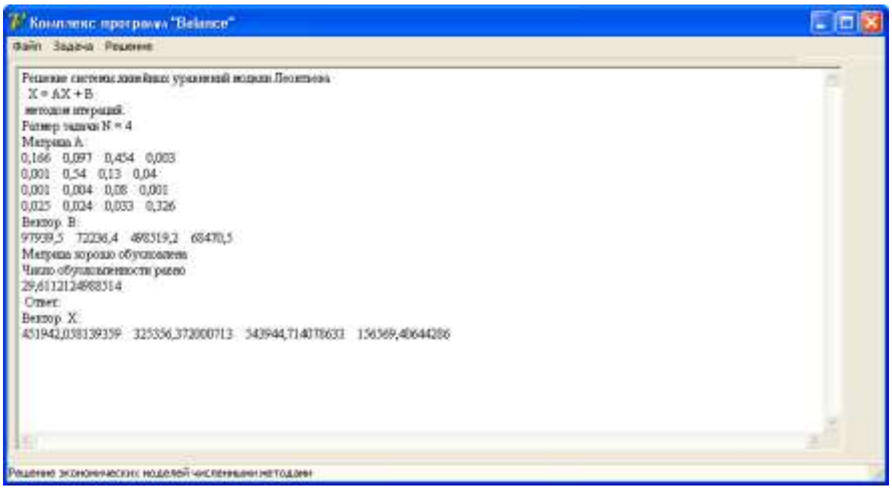

Рисунок 39 – Просмотр результатов решения

Из рисунка 39 видно, что агропромышленному комплексу Министерства сельского хозяйства Карачаево-Черкесской республики нужно произвести валовой продукции:

- отрасли «растениеводство» – на сумму 451942.05 тыс. руб.;
- отрасли «животноводство» – на сумму 325336.4 тыс. руб.;
- отрасли «промышленность» – на сумму 543944.7 тыс. руб.;
- отрасли «обслуживание» – на сумму 156569.4 тыс. руб.

9. Для того, чтобы сохранить результаты решения модели, выберем в пункте меню **Решение** команду **Сохранить решение** (рис. 40), щелкнем на ней мышью. На экране появится стандартное диалоговое окно сохранения решения **Сохранить** (рис. 41). В раскрывающемся списке **Папка** выберем диск, а затем папку, где нужно сохранить файл, в поле **Имя файла** введем имя сохраняемого файла. В поле **Тип файла** выберем тип сохраняемого файла. Щелкнем мышью на кнопке **Сохранить** (или на кнопке **Отмена** при случае, если захотим отменить сохранение документа).

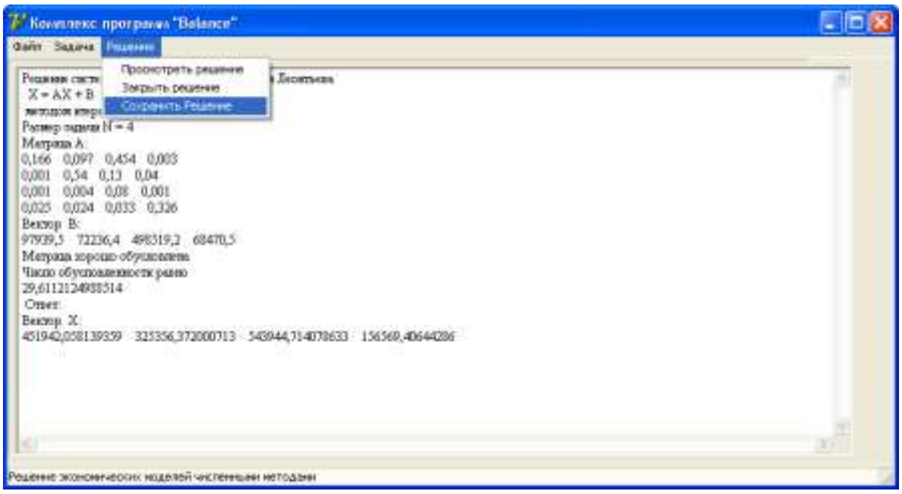

Рисунок 40 – Сохранение результатов решения

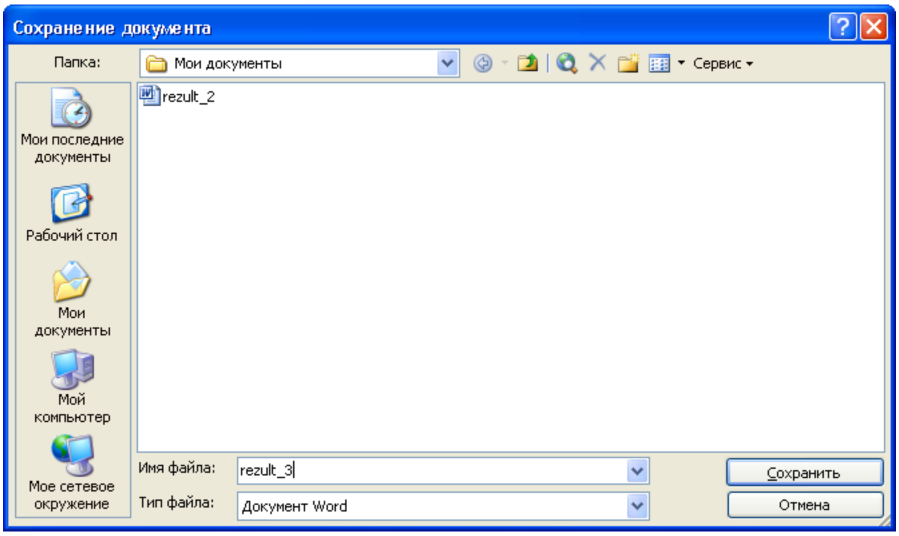

Рисунок 41 – Диалоговое окно сохранения результатов решения

10. Выберем в пункте меню **Решение** команду **Закрыть решение** (рис. 42) и щелкнем на ней мышью. Окно просмотра решений закроется.

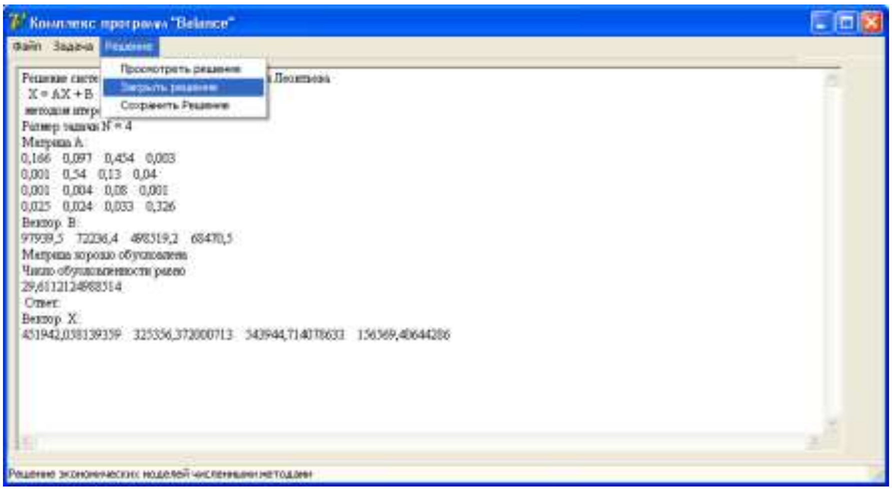

Рисунок 42 – Закрытие результатов решения

11. В пункте меню **Файл** выберем подпункт **Выход**. После чего программный продукт завершит свою работу.

Пример 3.

Пусть агропромышленным комплексом СХА (колхоз) «Кубань» Карачаево-Черкесской республики запланирован конечный спрос: продукции отрасли «растениеводство» на сумму 25448 тыс. руб. и продукции отрасли «животноводство» на сумму 16842 тыс. руб., тогда вектор спроса b имеет вид:

$$b = \begin{pmatrix} 25448 \\ 16842 \end{pmatrix},$$

Найдем, каким в этом случае должен быть валовой продукт каждой отрасли.

Применяя для решения этой задачи те же методы, что и в пункте 2.1., получим:

$$x = \begin{pmatrix} 30311 \\ 21663 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, агропромышленным комплексом СХА (колхоз) «Кубань» Карачаево-Черкесской республики отраслью «растениеводство» должно быть произведено валовой продукции на сумму 30311 тыс. руб. и отраслью «животноводство» – 21663 тыс. руб.

3.2 Построение неотрицательного решения в балансовой модели Леонтьева-Форда

Рассмотрим модель Леонтьева-Форда [17, 20, 26]:

$$\begin{cases} x = A_{11}x + A_{12}y + b_1, \\ y = A_{21}\bar{x} + A_{22}y - b_2, \end{cases} \tag{3.2.1}$$

где $x \in R^n$ – вектор валового выпуска продукта, называемого полезным;

$y \in R^m$ – вектор вредных отходов, выбрасываемых в окружающую среду, возникающих в процессе производства и подлежащих уничтожению для поддержания соответствующего уровня экологического состояния;

b_1 – вектор размерности n, характеризующий чистый выпуск полезного продукта;

b_2 – вектор размерности m, характеризующий остаточный уровень вредных отходов, т.е. отходов, остающихся во внешней среде после переработки предыдущих отходов;

A_{11} – технологическая матрица размера $n \times n$;

A_{12} – матрица размера $n \times m$, характеризующая затраты при уничтожении вредных отходов;

A_{21} – матрица размера $m \times n$, характеризующая объем вредных отходов, получаемых при выпуске полезного продукта;

A_{22} – матрица размера $m \times m$, характеризующая объемы вновь получаемых вредных веществ при уничтожении старых;

θ – нулевой вектор (размерности либо n, либо m).

Система уравнений (3.2.1) представляет собой балансовые соотношения между производством и потреблением в процессе производства, полученные в предположении линейной зависимости производственных затрат $A_{11}x$ от уровня валового выпуска x и уровня вредных отходов y, подлежащих уничтожению.

Второе уравнение системы (3.2.1) можно записать в виде

$$A_{21}x + A_{22}y - y = b_2 .$$

Это соотношение означает, что разность между произведенным вредным отходом $(A_{21}x + A_{22}y_2)$ и уничтоженной его величиной y равна остаточному уровню b_2 вредных отходов.

При построении решения модели Леонтьева-Форда (3.2.1) возникают следующие вопросы, требующие ответа:

1. Существует ли неотрицательное решение модели Леонтьева-Форда (3.3.1)?
2. Если неотрицательное решение Леонтьева-Форда (3.2.1) существует, то единственно ли оно?
3. Если модель Леонтьева-Форда (3.2.1) имеет единственное неотрицательное решение, то можно ли найти это решение аналитическими методами?
4. Если модель Леонтьева-Форда имеет единственное неотрицательное решение и это решение нельзя получить аналитическими методами, то можно ли его построить, используя приближенные методы?

Для этого нужно выяснить, устойчиво ли решение модели Леонтьева-Форда (3.2.1) относительно начальных условий.

Устойчивость решения модели Леонтьева-Форда (3.2.1) численными методами зависит от того, что относительно небольшие искажения данных модели (3.2.1) и погрешности, появляющиеся при больших значениях размерности $(n+m)$, могут привести к небольшим погрешностям результата решения.

Решение модели Леонтьева-Форда устойчиво, если число обусловленности матрицы $cond\,\tilde{A} \le 1000$, где

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \tag{3.2.2}$$

квадратная $(n+m)\times(n+m)$ матрица, состоящая из четырех блоков.

Если число обусловленности матрицы $cond\,\tilde{A} > 1000$, то решение является неустойчивым. В таком случае численное решение этой модели методом последовательных приближений, где точность вычислений в каждой итерации определяется лишь результатами предыдущей итерации, практически не зависит от ранее выполненных вычислений.

Рассмотрим методику построения численного решения модели Леонтьева-Форда (3.2.1) методом последовательных приближений. С экономической точки зрения представляет интерес только неотрицательное решение модели Леонтьева-Форда (3.2.1):

$$x \ge 0,\ y \ge 0. \tag{3.2.3}$$

Из результатов работ [3, 29] отметим, что для существования неотрицательного решения системы (3.2.1) мало потребовать, чтобы выполнилось условие

$$\|\tilde{A}\| < 1. \tag{3.2.4}$$

Так как в модели Леонтьева-Форда (3.2.1) b_2 входит со знаком «-», приходится накладывать на коэффициенты и свободные члены некоторые дополнительные ограничения [21]. Для этого мы воспользуемся теоремой 2:

Теорема 2. *Пусть для матрицы* $\tilde{A}$ *выполнено условие* $\|\tilde{A}\| < 1$, *а вектор* b_1 *и* b_2 *удовлетворяют условиям*

$$\left.\begin{aligned} b_1 + A_{11} b_1 - A_{12} b_2 \ge \theta, \\ -b_2 + A_{21} b_1 - A_{22} b_2 \ge \theta. \end{aligned}\right\}$$

Тогда система

$$\left.\begin{aligned} x &= A_{11}x + A_{12}y + b_1, \\ y &= A_{21}\bar{x} + A_{22}y - b_2, \end{aligned}\right\}$$

имеет и при том единственное неотрицательное решение (x^*, y^*), *к которому сходится метод последовательных приближений*

$$\left.\begin{aligned} x_{m+1} &= A_{11}x_m + A_{12}y_m + b_1, \\ y_{m+1} &= A_{21}x_m + A_{22}y_m - b_2, \end{aligned}\right\}$$
$$m = 0, 1, 2, \ldots,$$

при любом начальном приближении $x_0 \in E_1$, $y_0 \in E_2$.

На основании следствия из теоремы 2 разработан алгоритм и его программная реализация на языке Delphi в виде программного продукта «Комплекс программ «*Balance*».

1. Ввести матрицы A_{11} – $(n \times n)$, A_{12} – $(n \times m)$, A_{21} – $(m \times n)$, A_{22} – $(m \times m)$.
2. Ввести векторы b_1 – (n), b_2 – (m).
3. Задать начальное приближение (x_0, y_0).
4. Задать погрешность $\varepsilon > 0$ для вычисления $(\bar{x}^*, \bar{y}^*)$.
5. Построить блочную матрицу (3.2.2).
6. Проверить выполнимость условий (3.2.3), (3.2.4).
7. Проверить выполнимость условия
$$\left.\begin{aligned} b_1 + A_{11}b_1 - A_{12}b_2 &\geq \theta, \\ -b_2 + A_{21}b_1 - A_{22}b_2 &\geq \theta. \end{aligned}\right\}.$$
8. Если число обусловленности блочной матрицы $cond\, A \leq 1000$, то система имеет устойчивое решение, в противном случае система имеет неустойчивое решение.
9. Если выполнены условия пунктов 6-7, то вычисления производить по формуле
$$\left.\begin{aligned} x_{m+1} &= A_{11}x_m + A_{12}y_m + b_1, \\ y_{m+1} &= A_{21}x_m + A_{22}y_m - b_2, \end{aligned}\right\}$$
$$m = 0, 1, 2, \ldots,$$
(при любом начальном приближении $x_0 > 0$, $y_0 > 0$) до тех пор, пока не будет достигнута требуемая погрешность $\varepsilon > 0$.

Пример.

Пусть ООО «Фактор» был бы запланирован конечный спрос: цеха по производству «лакокрасочных изделий» – на сумму 42336 тыс. руб., цеха по производству «емкостей для красок» – на сумму 5695.2 тыс. руб. Количество вредных отходов, остающихся в природе, считать равным нулю.

Требуется найти, каким в этом случае должен быть валовой продукт каждого цеха ООО «Фактор» и количество вредных отходов, возникающих в процессе производства и подлежащих уничтожению для поддержания необходимого уровня экологического состояния окружающей среды, требуемого санитарными нормами.

Для решения выше поставленной задачи воспользуемся матрицами, построенными на основе таблицы 22 из пункта 2.3:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0.32 & 0.07 \\ 0.01 & 0.1 \end{pmatrix},\ A_{12} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 0.001 & 0.01 \end{pmatrix},\ A_{22} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}.$$

Из условия задачи вектор, характеризующий чистый выпуск полезного продукта, равен

$$b_1 = \begin{pmatrix} 42336 \\ 5695.2 \end{pmatrix},$$

вектор, характеризующий остаточный уровень вредных отходов, равен

$$b_2 = 0.$$

Тогда (с погрешностью $\varepsilon = 0.1$ с помощью разработанного программного продукта «Balance») находим $cond\,A \approx 97.33 \le 1000$, значит, блочная матрица A хорошо обусловлена, и система имеет устойчивое решение; получим вектор валового выпуска:

$$x = \begin{pmatrix} 63035.9 \\ 6454.7 \end{pmatrix},$$

и вектор вредных отходов:

$$y = \begin{pmatrix} 127.6 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, ООО «Фактор» должен произвести валовую продукцию цехом по производству: «лакокрасочных изделий» – на сумму 63035.9 тыс. руб., «емкостей для краски» – на сумму 6454.7 тыс. руб.

Затраты требуемые для уничтожения вредных отходов, возникающих в процессе производства, составили бы 127.6 тыс. руб.

3.3 Построение неотрицательного решения в балансовой модели Леонтьева-Форда, учитывающей утилизацию вредных отходов

Рассмотрим модель Леонтьева-Форда, учитывающую утилизацию вредных отходов вида [16, 17]:

$$\left.\begin{aligned} x &= A_{11}x + A_{12}y + b_1 - A_{13}y, \\ y &= A_{21}x + A_{22}y - b_2 + A_{23}y, \end{aligned}\right\} \tag{3.3.1}$$

где $x \in R^n$ – вектор валового выпуска продукта, называемого полезным;

$y \in R^m$ – вектор вредных отходов, выбрасываемых в окружающую среду, возникающих в процессе производства и подлежащих уничтожению для поддержания соответствующего уровня экологического состояния;

b_1 – вектор размерности n, характеризующий чистый выпуск полезного продукта;

b_2 – вектор размерности m, характеризующий остаточный уровень вредных отходов, т.е. отходов, остающихся во внешней среде после переработки предыдущих отходов;

A_{11} – технологическая матрица размера $n \times n$;

A_{12} – матрица размера $n \times m$, характеризующая затраты при уничтожении вредных отходов;

A_{21} – матрица размера $m \times n$, характеризующая объем вредных отходов, получаемых при выпуске полезного продукта;

A_{22} – матрица размера $m \times m$, характеризующая объемы вновь получаемых вредных веществ при уничтожении старых;

A_{13} – матрица размера $n \times m$, характеризующая затраты для переработки вредных отходов в целях получения полезных ингредиентов;

A_{23} – матрица размера $m \times m$, характеризующая объемы вновь получаемых вредных веществ при переработке старых;

θ – нулевой вектор (размерности либо n, либо m).

При решении модели Леонтьева-Форда, учитывающей утилизацию вредных отходов (3.3.1), возникают следующие вопросы:

1. Существует ли неотрицательное решение модели Леонтьева-Форда, учитывающей утилизацию вредных отходов (3.3.1).
2. Если неотрицательное решение этой модели существует, то единственно ли оно?
3. Если модель (3.3.1) имеет единственное неотрицательное решение, то можно ли найти это решение аналитическими методами?
4. Если модель Леонтьева-Форда, учитывающая утилизацию вредных отходов, имеет единственное неотрицательное решение и это решение нельзя получить аналитическими методами, то можно ли для этого использовать приближенные методы?

Ответы на первые три вопроса приведены в главе I. Для ответа на четвёртый вопрос нужно выяснить, устойчиво ли решение модели (3.3.1) относительно начальных условий.

Устойчивость решения модели (3.3.1) численными методами означает, что относительно небольшие искажения данных модели (3.3.1) и погрешности, появляющиеся при больших значениях размерности $(n+m)$, должны привести к небольшим погрешностям результата решения.

Решение модели Леонтьева-Форда, учитывающее утилизацию вредных отходов устойчиво, если число обусловленности блочной матрицы $cond\ \tilde{A} \le 1000$, где

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} - A_{13} \\ A_{21} & A_{22} + A_{23} \end{pmatrix} \qquad (3.3.2)$$

квадратная матрица размера $(n+m)\times(n+m)$.

Если число обусловленности $cond\ \tilde{A} > 1000$, то решение неустойчиво. Численное решение этой модели методом последовательных приближений, где точность вычислений в каждой итерации определяется лишь результатами предыдущей итерации, практически не зависит от ранее выполненных вычислений.

Рассмотрим методику построения численного решения модели (3.3.1) методом последовательных приближений. С экономической точки зрения представляет интерес только неотрицательное решение модели (3.3.1):

$$x \ge 0, \quad y \ge 0. \qquad (3.3.3)$$

Отметим, что для существования неотрицательного решения системы (3.3.1) мало потребовать, чтобы выполнилось условие $\|\tilde{A}\|<1$. Так как нахождение неотрицательного решения модели Леонтьева-Форда, учитывающей утилизацию вредных отходов, становится более сложным за счет присутствия в $\tilde{A}$ (3.3.2) блока $A_{12}-A_{13}$, рассмотрим следующую теорему [23].

Теорема 3. *Пусть матрица* $\tilde{A}$ *удовлетворяет условию* $\|\tilde{A}\|<1$ *и существуют векторы* $u_i,\quad v_i\quad (i=1,2)$ *такие, что*

$$\theta \le u_1 \le u_2, \qquad \theta \le v_1 \le v_2,$$

и

$$\left.\begin{array}{c} u_1 \le A_{11}\, u_1 + A_{12}\, v_1 + A_{13}\, v_2 + b_1, \\ v_1 \le A_{21}\, u_1 + A_{22}\, v_1 - b_2, \\ u_2 \ge A_{11}\, u_2 + A_{12}\, v_2 + A_{13}\, v_2 + b_1, \\ v_2 \ge A_{21}\, u_2 + A_{22}\, v_2 - b_2. \end{array}\right\}$$

Тогда, модель (1) имеет единственное неотрицательное решение (x^*,y^*), *причем* $u_1 \le x^* \le u_2,\quad v_1 \le y^* \le v_2$, *к которому сходится метод последовательных приближений*

$$\left.\begin{array}{c} x_{m+1} = A_{11}\, x_m + \left(A_{12} - A_{13}\right) y_m + b_1, \\ y_{m+1} = A_{21}\, x_m + \left(A_{22} + A_{23}\right) y_m - b_2, \end{array}\right\}$$

$m=0,1,2,\ldots,$ *при любых начальных приближениях* $x_0 \in [u_1, u_2]$, $y_0 \in [v_1, v_2]$.

На основании указанного следствия разработан алгоритм и его программная реализация в среде Delphi в виде программного продукта «Комплекс программ «The productivity of model».

1. Ввести матрицы $A_{11} - (n\times n)$, $A_{12} - (n\times m)$, $A_{13} - (n\times m)$, $A_{21} - (m\times n)$, $A_{22} - (m\times m)$, $A_{23} - (m\times m)$.
2. Ввести векторы $b_1 - (n)$, $b_2 - (m)$.
3. Задать начальное приближение $x_0 > 0$, $y_0 > 0$.
4. Задать погрешность $\varepsilon > 0$ для вычисления (x^*,y^*).
5. Построить блочную матрицу (3.3.2).
6. Проверить выполнимость условия $\|\tilde{A}\|<1$.
7. Проверить выполнимость условия (3.3.3).
8. Проверить выполнимость условий

$$\theta \le u_1 \le u_2, \qquad \theta \le v_1 \le v_2,$$

$$\left.\begin{array}{c} u_1 \le A_{11}\, u_1 + A_{12}\, v_1 + A_{13}\, v_2 + b_1, \\ v_1 \le A_{21}\, u_1 + A_{22}\, v_1 - b_2, \\ u_2 \ge A_{11}\, u_2 + A_{12}\, v_2 + A_{13}\, v_2 + b_1, \\ v_2 \ge A_{21}\, u_2 + A_{22}\, v_2 - b_2. \end{array}\right\}.$$

9. Проверить выполнимость условий $u_1 \le x^* \le u_2, \qquad v_1 \le y^* \le v_2$.
10. Если число обусловленности блочной матрицы (3.3.2) $cond\ \tilde{A} \le 1000$, то система имеет устойчивое решение, иначе система имеет неустойчивое решение.
11. Если выполнены условия из пунктов 6-9, то вычисления производить по формуле:

$$\left.\begin{array}{l} x_{m+1} = A_{11}\, x_m + \left(A_{12} - A_{13}\right) y_m + b_1, \\ y_{m+1} = A_{21}\, x_m + \left(A_{22} + A_{23}\right) y_m - b_2, \end{array}\right\}$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots,$$

(при любых начальных приближениях $x_0 \in [u_1, u_2]$, $y_0 \in [v_1, v_2]$) до тех пор, пока не будет достигнута требуемая погрешность $\varepsilon > 0$.

Пример.

Согласно усредненным статистическим данным ООО «Фактор» за 2005-2007 годы известно, что если ООО «Фактор» с помощью соответствующих технологических решений переработает утилизированную жесть (в целях получения полезной продукции) на сумму 49.75 тыс. руб., то в процессе этой переработки вновь появятся вредные отходы на сумму 4 тыс. руб. Такая переработка связана с определёнными затратами полезных продуктов на сумму 29.5 тыс. руб.

Требуется найти, каким должен быть валовой выпуск продукции цехов ООО «Фактор» с учетом повторной переработки его производственных отходов, а также общий объем вредных отходов.

Как нам известно из таблицы 22 пункта 2.3 ООО «Фактор» и из условий выше поставленной задачи:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0.32 & 0.07 \\ 0.02 & 0.1 \end{pmatrix},\ A_{12} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix},\ A_{13} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.006 \end{pmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 0.001 & 0.01 \end{pmatrix},\ A_{22} = (0),\ A_{23} = (0.03), \qquad (3.4.4)$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 30240 \\ 4039 \end{pmatrix},\ b_2 = 0.$$

Тогда с помощью разработанного программного продукта «Комплекс программ «*The productivity of model*» получим: $cond\, A \approx 478.23 \le 1000$, значит, блочная матрица A хорошо обусловлена, и система имеет устойчивое решение;
вектор валового выпуска:

$$x = \begin{pmatrix} 45131.9 \\ 5536.1 \end{pmatrix},$$

вектор вредных отходов, выбрасываемых в окружающую среду, возникающих в процессе производства и подлежащих уничтожению для поддержания соответствующего уровня экологического состояния:

$$y = (103.6).$$

Таким образом, ООО «Фактор» должен произвести продукцию: цех по производству «лакокрасочных изделий» на сумму 45131.9 тыс. руб.; цех по производству «емкостей для краски» на сумму 5536.1 тыс. руб.

Общий объём затрат, требуемых для уничтожения вредных отходов составит 103.6 тыс. руб.

Рассмотрим подробное описание разработанного программного продукта «Комплекс программ *«The productivity of model*», и воспользуемся им для решения следующей задачи. Пусть ООО «Фактор» запланировал бы конечный спрос: цеха по производству «лакокрасочных изделий» – на сумму 40240 тыс. руб.; цеха по производству «емкостей для краски» – на сумму 5036 тыс. руб. (при этом считать, что отходы не остаются во внешней среде после переработки предыдущих отходов). Требуется найти, каким должен быть валовой продукт цехов и количество вредных отходов.

Результаты решения и промежуточных вычислений приведены на рисунках 45, 53-55.

1. Вначале запустим программу ***«Комплекс программ «The productivity of model»*** так же, как программу **«Комплекс программ «*Balance*»,** щелкнув дважды мышью на его пиктограмме (рис. 43).

Рисунок 43 – Пиктограмма программного продукта

2. В меню **File (Файл)** выберем команду **New (Новый)** (рис. 44) и щелкнем на ней мышью. На экране появится новое поле для ввода данных.

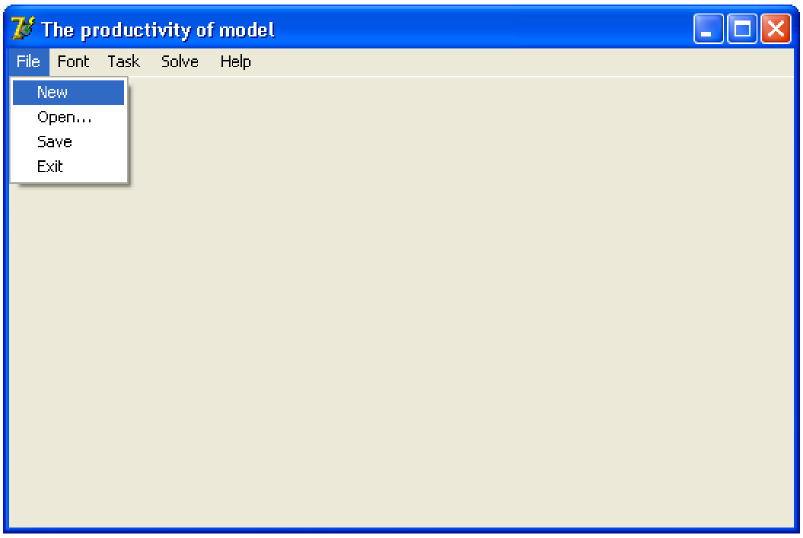

Рисунок 44 – Создание нового документа

Или в меню **File** выберем команду **Open (Открыть)**. На экране появится диалоговое окно **Открыть** (рис. 45**).** В раскрывающемся списке **Папка** выберем диск, а затем папку, где хранится нужный нам файл, дважды щелкнем имя выбранной папки мышью. Выделим файл, щелкнув мышью на ней, после чего в поле **Имя файла** появится имя выделенного файла, щелкнем мышью на кнопке **Открыть**. В результате на экране откроется выбранный нами файл.

Рисунок 45 – Диалоговое окно открытия документа

3. В поле ввода данных введем данные из выше поставленной задачи. (Порядок ввода данных можно посмотреть пункт меню **Help (Справка)**, щелкнув левой кнопкой мыши в пункте меню **Help** после чего на экране появится содержание справочной

системы программного продукта; она включает ссылки на все остальные темы справочника) (см. рис. 46):

- вводим размерности $n=2$, $m=1$;
- матрицу прямых затрат $A_{11}=\begin{pmatrix} 0.32 & 0.07 \\ 0.02 & 0.1 \end{pmatrix}$;
- матрицу, характеризующую затраты при уничтожении вредных отходов $A_{12}=\begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}$;
- матрицу размера, характеризующую затраты при утилизации отходов $A_{13}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0.006 \end{pmatrix}$;
- матрицу, характеризующую объем вредных отходов, получаемых при выпуске полезного продукта $A_{21}=\begin{pmatrix} 0.001 & 0.01 \end{pmatrix}$;
- матрицу, характеризующую объемы вновь получаемых вредных веществ при уничтожении старых $A_{22}=(0)$;
- матрицу, характеризующую объемы вновь получаемых вредных веществ при утилизации старых $A_{23}=(0.03)$;
- вектор, характеризующий чистый выпуск полезного продукта $b_1=\begin{pmatrix} 40240 \\ 5036 \end{pmatrix}$;
- вектор, характеризующий остаточный уровень вредных отходов $b_2=(0)$;
- начальное значение вектора валового выпуска продукта, называемого полезным $x_0=\begin{pmatrix} 51220 \\ 6253 \end{pmatrix}$;
- начальное приближенное значение вектора вредных отходов, выбрасываемых в окружающую среду, возникающих в процессе производства и подлежащих уничтожению для поддержания соответствующего уровня экологического состояния. $y_0=1$;
- погрешность $\varepsilon=0.00001$.

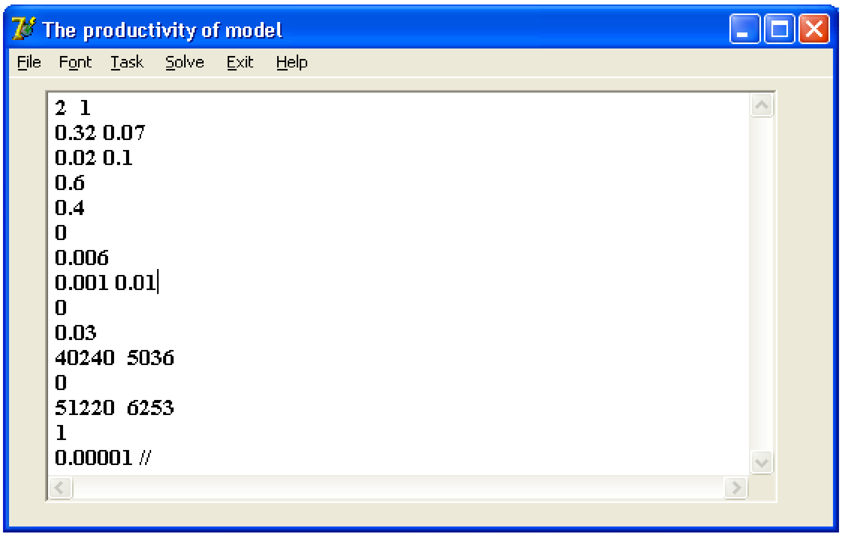

Рисунок 46 – Ввод данных для решения задачи модели Леонтьева-Форда

Форматировать шрифт можно, щелкнув левой кнопкой мыши в пункт меню **Font (Шрифт)**, после чего на экране появится (рис. 48) диалоговое окно **Шрифт.**


Рисунок 48 – Диалоговое окно форматирования шрифта

4. Выберем в пункте меню **File** команду **Save (Сохранить)**, после чего автоматически закрывается окно ввода данных.

5. В пункте меню **Task** (**Задача**) выберем метод решения задачи **Method of iteration** – метод итерации **(Matrix method** – матричный метод) (рис. 49).

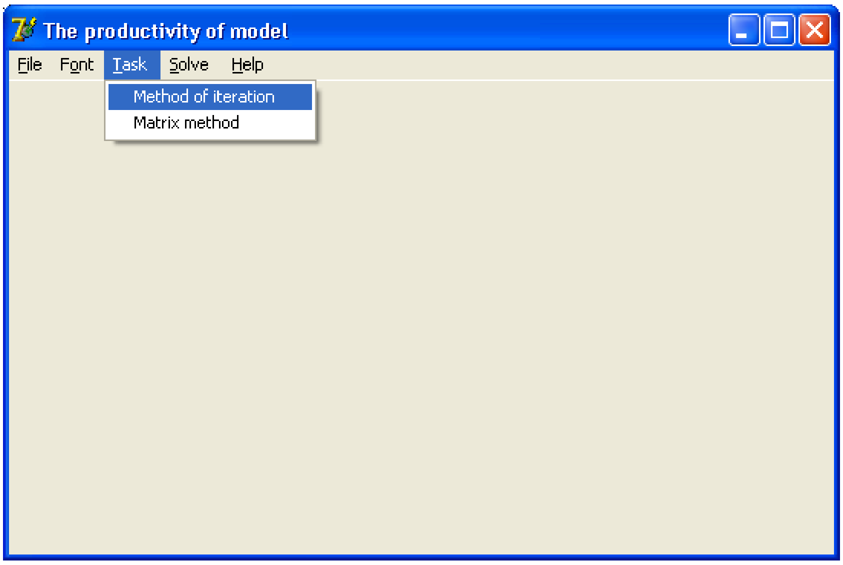

Рисунок 49 – Выбор метода решения

Если программа находит неотрицательное решение модели Леонтьева-Форда, учитывающей утилизацию вредных отходов, то на экране появляется диалоговое окно **Matekonom** с сообщением «*Решение задачи завершено!*» (рис. 50). Если матрица *A* вырождена, то выходит диалоговое окно **Matekonom** с сообщением «*Матрица А вырождена*» (рис. 51).

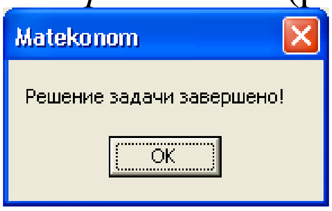

Рисунок 50 – Сообщение о завершении работы

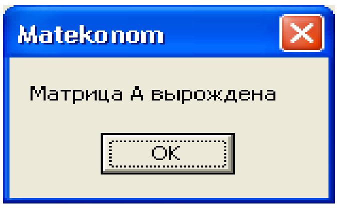

Рисунок 51 – Сообщение о вырожденности матрицы

6. Для просмотра полученного решения выберем в пункте меню **Solve (Решение)** команду **ViewSolv (Просмотр решения)** (рис. 52). Появится окно с результатами решения (рис. 53, рис. 54, рис. 55).

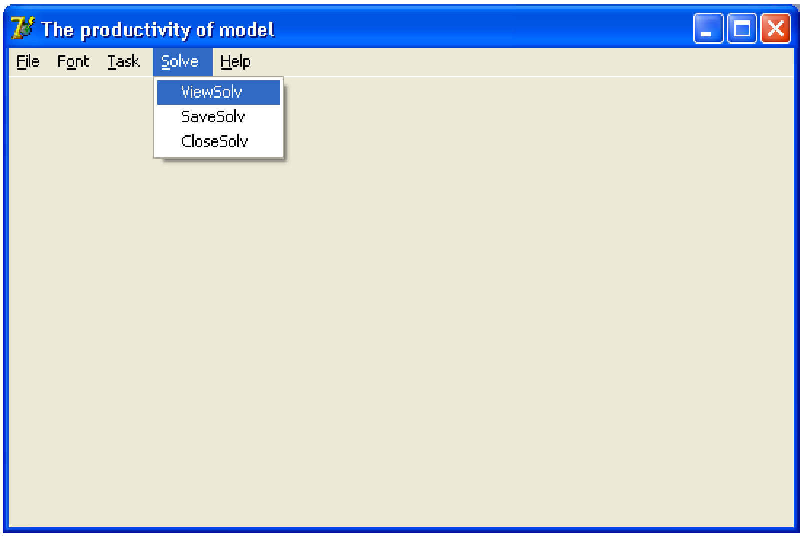

Рисунок 52 – Выбор команды для просмотра результатов

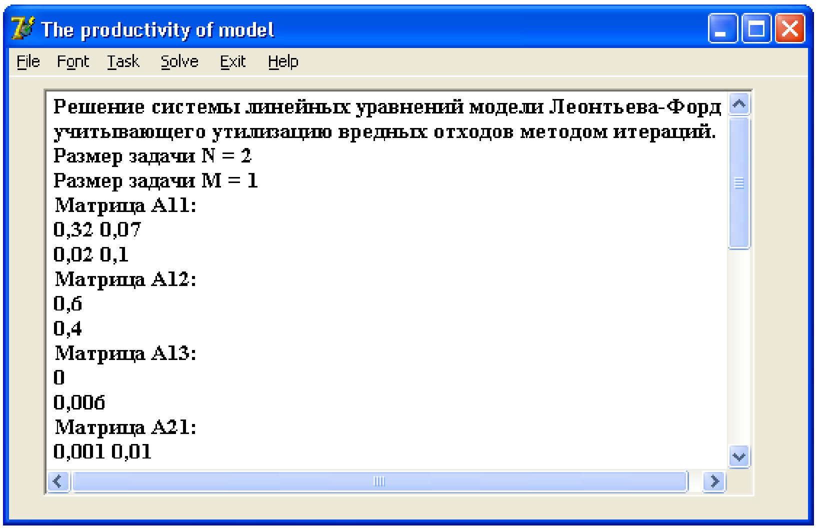

Рисунок 53 – Просмотр результатов решения

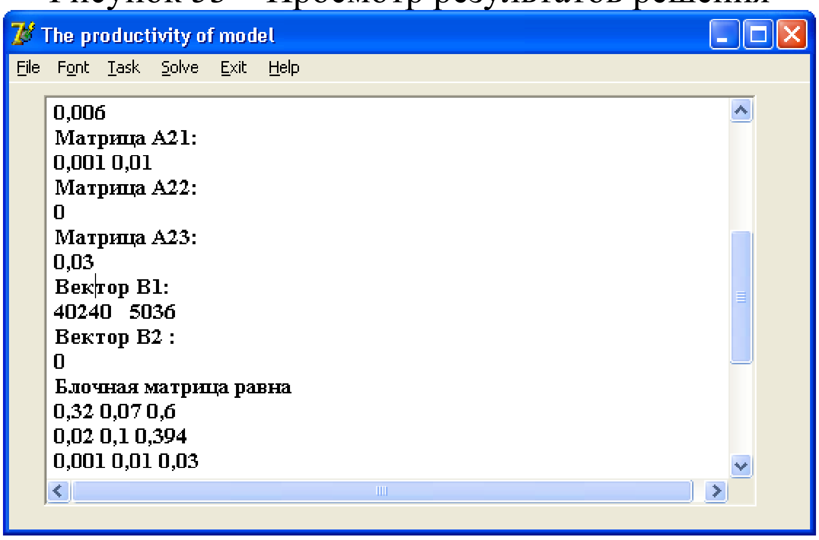

Рисунок 54 – Продолжение поля просмотра результатов решения

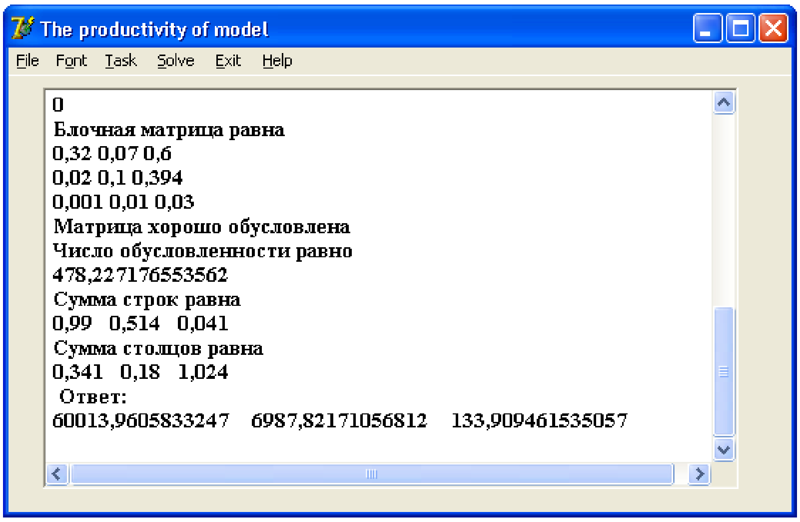

Рисунок 55 – Продолжение поля просмотра результатов решения

Из рис. 55 видно, что ООО «Фактор» должен будет произвести продукцию: цех по производству «лакокрасочных изделий» – на сумму 60014 тыс. руб.; цех по производству «емкостей для краски» – на сумму 6987.8 тыс. руб. Объем затрат, требуемых для уничтожения вредных отходов составит 133.9 тыс. руб.

8. Для сохранения результатов решения выберем в пункте меню **Solve** команду **SaveSolv (Сохранение решения)** (рис. 56) и щелкнем на ней кнопкой мыши.

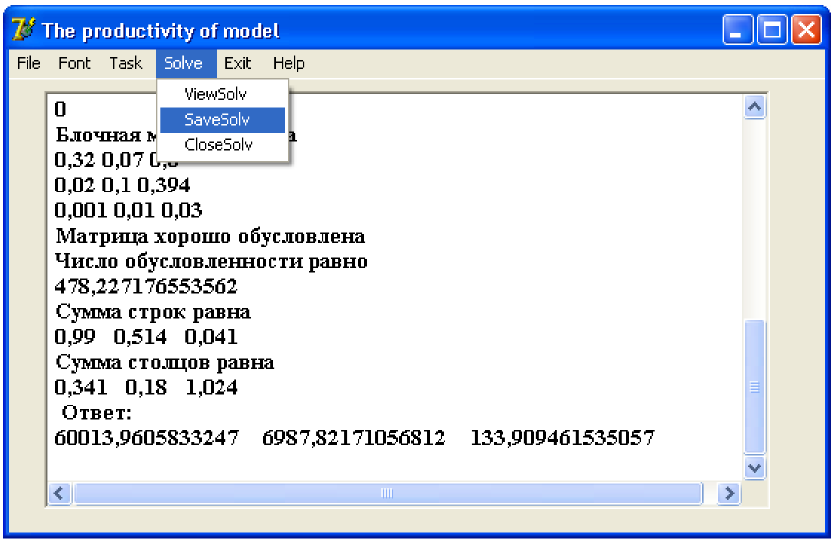

Рисунок 56 – Сохранение результатов решения модели Леонтьева-Форда

9. Для того чтобы закрыть окно с результатами решения выберем в пункте меню **Solve** команду **CloseSolv (Закрытие решения)**.

10. Для того чтобы закрыть программный продукт в пункте меню **File** выберем подпункт **Exit (Выход).**

3.4 Применение метода регуляризации для решения плохо обусловленных балансовых моделей

3.4.1 Решение плохо обусловленной балансовой модели Леонтьева методом регуляризации

В отношении высоких размерностей решались модельные задачи при построении матриц специально разработанным генератором матриц, при этом размерности достигали до 1000. Эти задачи позволили обосновать необходимость применения к ним специально разработанных технологий, приведенных ниже.

При построении балансовой модели Леонтьева (3.4.1) на практике как элементы матрицы A, так и элементы вектора f не могут быть заданы точно. В одних случаях незначительные ошибки в определении элементов A, f несущественно влияют на решение x модели, в других – существенно. Первый случай был достаточно подробно исследован ранее. Обратимся ко второму случаю, когда малые изменения исходных данных модели Леонтьева приводят к большим изменениям результатов ее решения. Задачу построения решения такой модели, согласно [32], будем называть некорректно поставленной, согласно этой терминологии саму рассматриваемую модель будем также называть некорректно поставленной.

В модели Леонтьева

$$x = Ax + f\,, \tag{3.4.1.1}$$

для удобства обозначим $B = (I - A)$, тогда (3.4.1.1) примет вид:

$$Bx = f\,. \tag{3.4.1.2}$$

Будем предполагать, что вместо точных значений элементов матрицы B и вектора конечного спроса f располагаем их приближенными значениями $\tilde{B}$, $\tilde{f}$, т.е.

$$\tilde{B}x = \tilde{f}\,. \tag{3.4.1.3}$$

Будем предполагать, что

$$\left\|\tilde{B} - B\right\| \le \xi\,,\ \left\|\tilde{f} - f\right\| \le \delta\,, \tag{3.4.1.4}$$

а сама модель (3.4.1.1) является некорректно поставленной.

Для поиска приближенного решения модели (3.4.1.3) будем применять метод регуляризации А.Н. Тихонова [27], [32].

Из [32] следует, что построение решения модели (3.4.1.2) на базе модели (3.4.1.3) сводится к нахождению вектора валового выпуска x^{α}, минимизирующего сглаживающий функционал:

$$M^{\alpha}\left[x, \tilde{f}, \tilde{B}\right] = \left\|\tilde{B}x - \tilde{f}\right\|^2 + \alpha\, \Omega[x],\ \alpha > 0, \tag{3.4.1.5}$$

где $\Omega[x] = \|x\|^2$ – стабилизирующий функционал, $\alpha = \alpha(\delta)$ – параметр регуляризации.

Как известно из [27], [32] существует один вектор валового выпуска x^{α}, который может быть определен при всяком фиксированном $\alpha > 0$ из системы

$$\alpha\, x_k^{\alpha} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \tilde{b}_{ik}\, \tilde{b}_{ij}\, x_j^{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{b}_{ik}\, \tilde{f}_i, \tag{3.4.1.6}$$

$$x_j^{\alpha} \ge 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

На основании указанных результатов, можно предложить следующий алгоритм построения решения системы (3.4.1.2) методом регуляризации:

1. Ввести размерность n.
2. Ввести матрицу $\tilde{B}$.
3. Ввести вектор $\tilde{f}$.
4. Задать $\alpha_1 > 0$.
5. При заданном значении α_1 найти решение x^{α_1} системы (3.4.1.6).
6. При известных значениях α_1, x^{α_1} вычислить значение $M^{\alpha_1}\left[x^{\alpha_1}, \tilde{f}, \tilde{B}\right]$ функционала (3.4.1.5).
7. Задать $\alpha_2 > 0$, $\alpha_2 < \alpha_1$.
8. При заданном значении α_2 найти решение x^{α_2} системы (3.4.1.6).
9. При известных значениях α_2, x^{α_2} вычислить значение $M^{\alpha_2}\left[x^{\alpha_2}, \tilde{f}, \tilde{B}\right]$ функционала (3.4.1.5).
10. Если $M^{\alpha_2}\left[x^{\alpha_2}, \tilde{f}, \tilde{B}\right] < M^{\alpha_1}\left[x^{\alpha_1}, \tilde{f}, \tilde{B}\right]$, то перейти к выполнению действий указанных в п.12.
11. Если $M^{\alpha_2}\left[x^{\alpha_2}, \tilde{f}, \tilde{B}\right] > M^{\alpha_1}\left[x^{\alpha_1}, \tilde{f}, \tilde{B}\right]$, то положить $x = x^{\alpha_1}$.
12. Задать $\alpha_3 > 0$, $\alpha_3 < \alpha_2$.
13. При заданном значении α_3, найти решение x^{α_3} системы (3.4.1.6).

14. При известных значениях α_3, x^{α_3}, вычислить значение $M^{\alpha_3}\left[x^{\alpha_3}, \tilde{f}, \tilde{B}\right]$ функционала (3.4.1.5).

15. Если $M^{\alpha_3}\left[x^{\alpha_3}, \tilde{f}, \tilde{B}\right] < M^{\alpha_2}\left[x^{\alpha_2}, \tilde{f}, \tilde{B}\right]$, то перейти к выполнению действий, указанных в п.17.

16. Если $M^{\alpha_3}\left[x^{\alpha_3}, \tilde{f}, \tilde{B}\right] > M^{\alpha_2}\left[x^{\alpha_2}, \tilde{f}, \tilde{B}\right]$, то положить $x = x^{\alpha_2}$.

17. Задать $\alpha_4 > 0$, $\alpha_4 < \alpha_3$.

И так далее, этот процесс продолжаем до тех пор, пока на $(k+1)$-м шаге не найдем α_{k+1}, $x^{\alpha_{k+1}}$, при которых $M^{\alpha_{k+1}}\left[x^{\alpha_{k+1}}, \tilde{f}, \tilde{B}\right] > M^{\alpha_k}\left[x^{\alpha_k}, \tilde{f}, \tilde{B}\right]$. В этом случае полагаем $x = x^{\alpha_k}$ и процесс вычислений прекращаем.

Данный алгоритм реализован в виде программного продукта «Комплекс программ “ModelRegularized”» в среде Delphi. Ниже рассмотрим пример его использования для нахождения решения балансовой модели СХПК «Сторожевский» Зеленчукского района Карачаево-Черкесской республики.

Пример.

Усредненные статистические данные межотраслевого баланса двухотраслевой экономики СХПК «Сторожевский» Зеленчукского района Карачаево-Черкесской республики за 2005-2007 годы приведены в таблице 26.

Таблица 26 – Таблица межотраслевого баланса двухотраслевой экономики СХПК «Сторожевский» Зеленчукского района за 2005-2007 гг. (тыс. руб.)

Производящие отрасли		Потребляющие отрасли		Конечный продукт	Валовой продукт
		1	2		
1	Растениеводство	238.8	39.8	119.4	398
2	Животноводство	63.2	300.2	-47.4	316

И таблицы 26 получим матрицу затрат:

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.1 \\ 0.2 & 0.95 \end{pmatrix},$$

$$B = (I - A) = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.1 \\ -0.2 & 0.05 \end{pmatrix},$$

и вектор конечного спроса

$$f = \begin{pmatrix} 119.4 \\ -47.4 \end{pmatrix},$$

здесь $rang \quad B = rang \quad (B/f) = 1$.

Тогда с помощью разработанного в среде Delphi программного продукта «Комплекс программ “ModelRegularized”», получим:

параметр регуляризации $\alpha = 0.0005$, $x = \begin{pmatrix} 632.5 \\ 650.5 \end{pmatrix}$.

Таким образом, если применить метод регуляризации для нахождения неотрицательного решения балансовой модели СХПК «Сторожевский», то валовой выпуск продукции отраслей «растениеводство» равен 632.5 тыс. руб. и отрасли «животноводство» – 650.5 тыс. руб.

Сравнивая полученное решение с данными таблицы 26, можно сказать, что СХПК «Сторожевский» должен увеличить выпуск валовой продукции отрасли «растениеводство» на 234.5 тыс. руб. и отрасли «животноводство» на 333.9 тыс. руб.

3.4.2 Решение плохо обусловленной балансовой модели Леонтьева-Форда методом регуляризации

Так же, как в модели Леонтьева из п. 3.4.1 при построении балансовой модели Леонтьева-Форда (3.2.1) на практике элементы блочной матрицы $\widetilde{A}$ и элементы блочного вектора $\widetilde{f}$ не могут быть заданы точно. В одних случаях незначительные ошибки в определении элементов $\widetilde{A}$, $\widetilde{f}$ несущественно влияют на решение $\widetilde{z}$ модели, в других – существенно. Первый случай был проанализирован ранее в пункте 3.2. Обратимся ко второму случаю, когда относительно небольшие искажения данных в модели Леонтьева-Форда (3.2.1) приводят к большим погрешностям в $\widetilde{z}$. Задачу построения решения такой модели, согласно [32], будем называть некорректно поставленной.

Воспользуемся формальной записью модели (3.2.1) в виде векторно-матричного уравнения вида

$$\widetilde{z} = \widetilde{A}\,\widetilde{z} + \widetilde{f}\,, \tag{3.4.2.1}$$

где $\widetilde{z}$ – блочный вектор: $\widetilde{z} = col(x, y) \in R^{n+m}$; $\widetilde{A}$ – квадратная матрица, состоящая из четырех блоков:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}; \tag{3.4.2.2}$$

$\widetilde{f}$ – блочный вектор: $\widetilde{f} = col(b_1, -b_2) \in R^{n+m}$.

Из (3.4.2.1) следует, что

$$\left(I-\widetilde{A}\right)\cdot\widetilde{z}=\widetilde{f}\ , \qquad (3.4.2.3)$$

где I – единичная матрица тех же размеров, что и блочная матрица $\widetilde{A}$.

Для удобства обозначим $C=\left(I-\widetilde{A}\right)$, тогда (3.4.2.3) примет вид:

$$C\cdot\widetilde{z}=\widetilde{f}\ . \qquad (3.4.2.4)$$

Будем предполагать, что вместо точных значений элементов блочной матрицы C и блочного вектора $\widetilde{f}$ имеем их приближенные значения $\widetilde{C}$, $\widetilde{f}^{\bullet}$, т.е.

$$\widetilde{C}\cdot\widetilde{z}=\widetilde{f}^{\bullet}\ . \qquad (3.4.2.5)$$

Будем предполагать, что

$$\left\|\widetilde{C}-C\right\|\le\xi\,,\ \left\|\widetilde{f}^{\bullet}-\widetilde{f}\right\|\le\delta\,. \qquad (3.4.2.6)$$

Для поиска приближенного решения модели (3.4.2.5) будем применять метод регуляризации А.Н. Тихонова [27], [32].

Из [32] следует, что поиск решения (3.4.2.4) сводится к нахождению вектора $\widetilde{z}^{\alpha}$, минимизирующего сглаживающий функционал:

$$M^{\alpha}\left[\widetilde{z},\widetilde{f}^{\bullet},\widetilde{C}\right]=\left\|\widetilde{C}z-\widetilde{f}^{\bullet}\right\|^{2}+\alpha\,\Omega[\widetilde{z}],\ \alpha>0\,, \qquad (3.4.2.7)$$

где $\Omega[x]=\|\widetilde{z}\|^{2}$ – стабилизирующий функционал, $\alpha=\alpha(\delta)$ – параметр регуляризации. При этом, как это показано в [27], [32] существует один вектор валового выпуска $\widetilde{z}^{\alpha}$, который может быть определен при всяком фиксированном $\alpha>0$ из системы

$$\alpha\,\widetilde{z}_{k}^{\alpha}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{c}_{ik}\,\widetilde{c}_{ij}\,\widetilde{z}_{j}^{\alpha}=\sum_{i=1}^{n}\widetilde{c}_{ik}\,\widetilde{f}_{i}^{\bullet}\,,\ \ k=1,2,3,\ldots,n\,. \qquad (3.4.2.8)$$

На основании указанных результатов можно предложить следующий алгоритм построения решения системы (3.4.2.8) методом регуляризации:

1. Ввести размерность n, m.
2. Ввести блочную матрицу $\widetilde{C}$.
3. Ввести блочный вектор $\widetilde{f}^{\bullet}$.
4. Задать $\alpha_1>0$.
5. При заданном значении α_1 найти решение $\widetilde{z}^{\alpha_1}$ системы (3.4.2.8).
6. При известных значениях α_1, $\widetilde{z}^{\alpha_1}$ вычислить значение $M^{\alpha_1}\left[\widetilde{z}^{\alpha_1},\widetilde{f}^{\bullet},\widetilde{B}\right]$ функционала (3.4.2.7).
7. Задать $\alpha_2>0$, $\alpha_2<\alpha_1$.
8. При заданном значении α_2 найти решение $\widetilde{z}^{\alpha_2}$ системы (3.4.2.8).

9. При известных значениях α_2, $\tilde{z}^{\alpha_2}$ вычислить значение $M^{\alpha_2}\left[\tilde{z}^{\alpha_2}, \tilde{f}^{\bullet}, \tilde{B}\right]$ функционала (3.4.2.7).
10. Если $M^{\alpha_2}\left[\tilde{z}^{\alpha_2}, \tilde{f}^{\bullet}, \tilde{B}\right] < M^{\alpha_1}\left[\tilde{z}^{\alpha_1}, \tilde{f}^{\bullet}, \tilde{B}\right]$, то перейти к выполнению действий, указанных в п.12.
11. Если $M^{\alpha_2}\left[\tilde{z}^{\alpha_2}, \tilde{f}^{\bullet}, \tilde{B}\right] > M^{\alpha_1}\left[\tilde{z}^{\alpha_1}, \tilde{f}^{\bullet}, \tilde{B}\right]$, то положить $\tilde{z} = \tilde{z}^{\alpha_1}$.
12. Задать $\alpha_3 > 0$, $\alpha_3 < \alpha_2$.
13. При заданном значении α_3 найти решение $\tilde{z}^{\alpha_3}$ системы (3.4.2.8).
14. При известных значениях α_3, $\tilde{z}^{\alpha_3}$ вычислить значение $M^{\alpha_3}\left[\tilde{z}^{\alpha_3}, \tilde{f}^{\bullet}, \tilde{B}\right]$ функционала (3.4.2.7).
15. Если $M^{\alpha_3}\left[\tilde{z}^{\alpha_3}, \tilde{f}^{\bullet}, \tilde{B}\right] < M^{\alpha_2}\left[\tilde{z}^{\alpha_2}, \tilde{f}^{\bullet}, \tilde{B}\right]$, то перейти к выполнению действий, указанных в п.17.
16. Если $M^{\alpha_3}\left[\tilde{z}^{\alpha_3}, \tilde{f}^{\bullet}, \tilde{B}\right] > M^{\alpha_2}\left[\tilde{z}^{\alpha_2}, \tilde{f}^{\bullet}, \tilde{B}\right]$, то полагать $\tilde{z} = \tilde{z}^{\alpha_2}$.
17. Задать $\alpha_4 > 0$, $\alpha_4 < \alpha_3$.

И так далее, этот процесс продолжаем до тех пор, пока на $(k+1)$-м шаге не найдем α_{k+1}, $\tilde{z}^{\alpha_{k+1}}$, при которых $M^{\alpha_{k+1}}\left[\tilde{z}^{\alpha_{k+1}}, \tilde{f}^{\bullet}, \tilde{B}\right] > M^{\alpha_k}\left[\tilde{z}^{\alpha_k}, \tilde{f}^{\bullet}, \tilde{B}\right]$. В этом случае полагаем $\tilde{z} = \tilde{z}^{\alpha_k}$ и процесс вычислений прекращаем.

Данный алгоритм реализован в виде программного продукта «Комплекс программ “ModelRegularized”» в среде Delphi.

Пример.

Используем данные из таблицы 22 пункта 2.3.

$$C = \left(I - \tilde{A}\right) = \begin{pmatrix} 0.68 & -0.07 & -0.6 \\ -0.01 & 0.9 & -0.4 \\ -0.001 & -0.01 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{f} = \begin{pmatrix} 30239.7 \\ 4068 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решая задачу (3.4.2.5) с помощью разработанного в среде Delphi программного продукта «Комплекс программ “ModelRegularized”», получим:

$$\alpha = 0.001,$$

$$\tilde{z}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 44935.3 \\ 5029.4 \\ 50.9 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, ООО «Фактор» должен произвести продукцию: цех по производству «лакокрасочных изделий» – на сумму 44935.3 тыс. руб.; цех по производству «емкостей для краски» – на сумму 5029.4 тыс. руб. Общий объём затрат, требуемых для уничтожения вредных отходов составил бы 50.9 тыс. руб.

Сравнивая с данными из таблицы 22 пункта 2.3, получаем, что валовая продукция цеха по производству «лакокрасочных изделий» – на сумму 4860.6 тыс. руб. меньше, а «емкостей для краски» – на сумму 133.4 тыс. руб. больше. Затраты, требуемые для уничтожения вредных отходов, возникающих в процессе производства, уменьшатся на 69.1 тыс. руб.

3.4.3 Решение плохо обусловленной балансовой модели Леонтьева-Форда, учитывающей утилизацию вредных отходов методом регуляризации

Рассмотрим модель Леонтьева-Форда, учитывающую утилизацию вредных отходов

$$\left.\begin{array}{l} x = A_{11}x + A_{12}y + b_1 - A_{13}y, \\ y = A_{21}x + A_{22}y - b_2 + A_{23}y, \\ \quad x \ge \theta, \qquad y \ge \theta, \end{array}\right\} \tag{3.4.3.1}$$

где A_{13} – матрица размера $n \times m$, характеризующая затраты при утилизации отходов; A_{23} – матрица размера $m \times m$, характеризующая объемы вновь получаемых вредных веществ при утилизации старых.

Из пункта 1.1.3 главы первой формально модель (3.4.3.1) может быть записана в виде матричного уравнения

$$\tilde{z} = \tilde{A}\,\tilde{z} + \tilde{f}\,, \tag{3.4.3.2}$$

где

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} - A_{13} \\ A_{21} & A_{22} + A_{23} \end{pmatrix}, \tag{3.4.3.3}$$

$$\tilde{f} = col(b_1, -b_2)^T \in R^{n+m}\,,\ \tilde{z} = col(x, y)^T \in R^{n+m}\,.$$

Из (3.4.3.2) следует, что

$$\left(I - \tilde{A}\right)\cdot \tilde{z} = \tilde{f}\,, \tag{3.4.3.4}$$

где I – единичная матрица тех же размеров, что и блочная матрица $\tilde{A}$.

При построении балансовой модели Леонтьева-Форда, учитывающей утилизацию вредных отходов (3.4.3.4) на практике, элементы блочной матрицы $\tilde{A}$ и элементы блочного вектора $\tilde{f}$ не могут быть заданы точно. Незначительные ошибки в определении элементов $\widetilde{A}$, $\widetilde{f}$ в одном случае не существенно влияют на решение $\widetilde{z}$ модели, в другом – существенно. Первый случай был проанализирован ранее в пункте 3.3. Обратимся ко второму случаю, когда относительно небольшие искажения данных в модели Леонтьева-Форда, учитывающей утилизацию вредных отходов (3.4.3.4), приводят к большим погрешностям в $\widetilde{z}$. Задачу построения решения такой модели, согласно [32], будем называть некорректно поставленной.

Для удобства обозначим $C = \left(I - \widetilde{A}\right)$, тогда (3.4.3.4) примет вид:

$$C \cdot \widetilde{z} = \widetilde{f} \,. \tag{3.4.3.5}$$

Будем предполагать, что вместо точных значений элементов блочной матрицы C и блочного вектора $\widetilde{f}$ имеем их приближенные значения $\widetilde{C}$, $\widetilde{f}^{\bullet}$, т.е.

$$\widetilde{C} \cdot \widetilde{z} = \widetilde{f}^{\bullet} \tag{3.4.3.6}$$

Будем предполагать, что

$$\left\|\widetilde{C} - C\right\| \le \xi \,, \ \left\|\widetilde{f}^{\bullet} - \widetilde{f}\right\| \le \delta \,. \tag{3.4.3.7}$$

Для поиска приближенного решения модели (3.4.3.6), также будем применять метод регуляризации А.Н. Тихонова [27], [32], как и в случае с моделью Леонтьева-Форда из пункта 3.4.2.

Из [32] следует, что поиск решения (3.4.3.6) сводится к нахождению вектора $\widetilde{z}^{\alpha}$, минимизирующего сглаживающий функционал:

$$M^{\alpha}\left[\widetilde{z}, \widetilde{f}^{\bullet}, \widetilde{C}\right] = \left\|\widetilde{C}z - \widetilde{f}^{\bullet}\right\|^{2} + \alpha\, \Omega[\widetilde{z}], \ \alpha > 0 \,, \tag{3.4.3.8}$$

где $\Omega[x] = \|\widetilde{z}\|^{2}$ – стабилизирующий функционал, $\alpha = \alpha(\delta)$ – параметр регуляризации. При этом, как это показано в [27], [32] существует один вектор валового выпуска $\widetilde{z}^{\alpha}$, который может быть определен при всяком фиксированном $\alpha > 0$ из системы

$$\alpha\, \widetilde{z}_k^{\alpha} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \widetilde{c}_{ik}\, \widetilde{c}_{ij}\, \widetilde{z}_j^{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{c}_{ik}\, \widetilde{f}_i^{\bullet} \,, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, n \,. \tag{3.4.3.9}$$

На основании указанных результатов можно предложить следующий алгоритм построения решения системы (3.4.3.9) методом регуляризации:

1. Ввести размерность n, m.
2. Ввести блочную матрицу $\widetilde{C}$.
3. Ввести блочный вектор $\widetilde{f}^{\bullet}$.
4. Задать $\alpha_1 > 0$.

5. При заданном значении α_1 найти решение $\tilde{z}^{\alpha_1}$ системы (3.4.3.9).
6. При известных значениях α_1, $\tilde{z}^{\alpha_1}$ вычислить значение $M^{\alpha_1}\left[\tilde{z}^{\alpha_1}, \tilde{f}^{\bullet}, \tilde{B}\right]$ функционала (3.4.3.8).
7. Задать $\alpha_2 > 0$, $\alpha_2 < \alpha_1$.
8. При заданном значении α_2 найти решение $\tilde{z}^{\alpha_2}$ системы (3.4.3.9).
9. При известных значениях α_2, $\tilde{z}^{\alpha_2}$ вычислить значение $M^{\alpha_2}\left[\tilde{z}^{\alpha_2}, \tilde{f}^{\bullet}, \tilde{B}\right]$ функционала (3.4.3.8).
10. Если $M^{\alpha_2}\left[\tilde{z}^{\alpha_2}, \tilde{f}^{\bullet}, \tilde{B}\right] < M^{\alpha_1}\left[\tilde{z}^{\alpha_1}, \tilde{f}^{\bullet}, \tilde{B}\right]$, то перейти к выполнению действий указанных в п.12.
11. Если $M^{\alpha_2}\left[\tilde{z}^{\alpha_2}, \tilde{f}^{\bullet}, \tilde{B}\right] > M^{\alpha_1}\left[\tilde{z}^{\alpha_1}, \tilde{f}^{\bullet}, \tilde{B}\right]$, то положить $\tilde{z} = \tilde{z}^{\alpha_1}$.
12. Задать $\alpha_3 > 0$, $\alpha_3 < \alpha_2$.
13. При заданном значении α_3, найти решение $\tilde{z}^{\alpha_3}$ системы (3.4.3.9).
14. При известных значениях α_3, $\tilde{z}^{\alpha_3}$ вычислить значение $M^{\alpha_3}\left[\tilde{z}^{\alpha_3}, \tilde{f}^{\bullet}, \tilde{B}\right]$ функционала (3.4.3.8).
15. Если $M^{\alpha_3}\left[\tilde{z}^{\alpha_3}, \tilde{f}^{\bullet}, \tilde{B}\right] < M^{\alpha_2}\left[\tilde{z}^{\alpha_2}, \tilde{f}^{\bullet}, \tilde{B}\right]$, то перейти к выполнению действий указанных в п.17.
16. Если $M^{\alpha_3}\left[\tilde{z}^{\alpha_3}, \tilde{f}^{\bullet}, \tilde{B}\right] > M^{\alpha_2}\left[\tilde{z}^{\alpha_2}, \tilde{f}^{\bullet}, \tilde{B}\right]$, то полагать $\tilde{z} = \tilde{z}^{\alpha_2}$.
17. Задать $\alpha_4 > 0$, $\alpha_4 < \alpha_3$.

И так далее, этот процесс продолжаем до тех пор, пока на $(k+1)$-м шаге не найдем α_{k+1}, $\tilde{z}^{\alpha_{k+1}}$, при которых $M^{\alpha_{k+1}}\left[\tilde{z}^{\alpha_{k+1}}, \tilde{f}^{\bullet}, \tilde{B}\right] > M^{\alpha_k}\left[\tilde{z}^{\alpha_k}, \tilde{f}^{\bullet}, \tilde{B}\right]$. В этом случае полагаем $\tilde{z} = \tilde{z}^{\alpha_k}$ и процесс вычислений прекращаем.

Данный алгоритм реализован в виде программного продукта «Комплекс программ “ModelRegularized”» в среде Delphi. Рассмотрим пример его использования для нахождения решения балансовой модели ООО «Фактор».

Пример.

Используем данные из пункта 2.3 главы II.

$$C = \left(I - \tilde{A}\right) = \begin{pmatrix} 0.68 & -0.07 & -0.6 \\ -0.01 & 0.9 & -0.4 \\ -0.001 & -0.01 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{f} = \begin{pmatrix} 30239.7 \\ 4068 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решая задачу (3.4.3.6) с помощью разработанного на языке программирования Delphi программного продукта «Комплекс программ “ModelRegularized”» получим:

$$\alpha = 0.001,\ \tilde{z}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 44935.3 \\ 5029.4 \\ 50.9 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, ООО «Фактор» должно произвести продукцию: цех по производству «лакокрасочных изделий» – на сумму 44935.3 тыс. руб.; цех по производству «емкостей для краски» – на сумму 5029.4 тыс. руб. Общий объём затрат, требуемых для уничтожения вредных отходов составит 50.9 тыс. руб.

Сравнивая с данными из пункта 2.3 главы II, получаем, что валовая продукция цеха по производству «лакокрасочных изделий» – на сумму 4860.6 тыс. руб. меньше, а «емкостей для краски» – на сумму 133.4 тыс. руб. больше. Затраты, требуемые для уничтожения вредных отходов, возникающих в процессе производства, уменьшатся на 69.1 тыс. руб.

В главе III приведены методики построения неотрицательных решений балансовых моделей Леонтьева, Леонтьева-Форда и Леонтьева-Форда, учитывающей утилизацию вредных отходов. Эти методики реализованы в программные продукты «Комплекс программ «Balance», «Комплекс программ «The productivity of model», и приведено их подробное описание. Приведены примеры их использования.

Приведены методики нахождения неотрицательных решений в балансовых моделях Леонтьева, Леонтьева-Форда, Леонтьева-Форда, учитывающей утилизацию вредных отходов методом регуляризации. Эти методики реализованы в программный продукт «Комплекс программ “ModelRegularized”». Приведены примеры его использования.

Контрольные вопросы и задания

1. Какую модель называют некорректно поставленной?
2. Что позволяет найти описанная методика нахождения неотрицательного решения в балансовой модели Леонтьева?
3. Что позволяет найти описанная методика нахождения неотрицательного решения в балансовой модели Леонтьева-Форда?
4. Что позволяет найти описанная методика нахождения неотрицательного решения в балансовой модели Леонтьева-Форда, учитывающей утилизацию вредных отходов?

ГЛАВА IV. ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ В БАЛАНСОВЫХ МОДЕЛЯХ

4.1 Оптимизационные задачи в рамках модели Леонтьева

Рассмотрим модель межотраслевого баланса Леонтьева вида [10] (см. главу I):

$$x = Ax + f\,,\ x \geq \theta, \tag{4.1.1}$$

$x,\ \ \theta,\ \ f \in R_+^n\ \ R_+^n = \{col(x_1,\ldots,x_n):\ \ x_i \geq 0,\ \ i = 1,2,\ldots,n\}$, $A = (a_{ij})$, $\mathrm{i},\ \mathrm{j} = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}$ – неотрицательная матрица размерности $n \times n$, θ – нулевой вектор, размерности n, n – число рассматриваемых отраслей в экономике, x_{i} – объем выпуска продукции i-й отрасли; a_{ij} – количество единиц i-й отрасли, идущих на производство 1 (единицы) продукции j-й отрасли, $i, j = 1,2,\ldots n$, f – вектор чистого выпуска модели (4.1.1).

На множестве решений (4.1.1) рассмотрим несколько оптимизационных задач [24].

1. Максимизация валового выпуска продуктов

Рассмотрим задачу: найти

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \to \max \tag{4.1.2}$$

в предположении, что $x_i,\ \ i = 1, 2,\ldots,n$, удовлетворяют условиям (4.1.1).

Сумма

$$\sum_{i=1}^{n} x_{\mathrm{i}}\ ,$$

представляет собой общий валовой продукт экономики. Данная задача представляет собой задачу линейного программирования с целевой функцией (4.1.2) и ограничениями (4.1.1).

2. Максимизация объема выпуска продуктов одной или нескольких отраслей

Вместо критерия (4.1.2) можно рассматривать критерии

$$x_i \to \max, \tag{4.1.3}$$

i – фиксировано, $i = 1,\ 2,\ \ldots, n$ или

$$\sum_{\kappa=1}^{r} x_{i_\kappa} \to \max\,,\ r \leq n\,. \tag{4.1.4}$$

Совокупность ограничений та же, что и в п. 1. Она задается балансовыми соотношениями и неравенствами (4.1.1).

3. **Максимизация объема выпуска продуктов нескольких отраслей с учетом их предпочтительности**

Рассмотрим критерий

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\, x_i \to \max,\ c_i = const \ge 0,\ i = 1, 2,\ \ldots,\ n, \qquad (4.1.5)$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = 1,$$

с ограничениями (4.1.1). Коэффициенты c_i задаются экспертами и показывают степень предпочтительности в рассматриваемой задаче одной отрасли по отношению к другим.

Пусть модель (4.1.1) продуктивна. Если

$$rang(E - A) = rang(E - A,\quad f) = n, \qquad (4.1.6)$$

то решения всех задач (4.1.2), (4.1.1); (4.1.3), (4.1.1); (4.1.4), (4.1.1); (4.1.5), (4.1.1) будут совпадать. Различными будут только значения целевых функций (4.1.2)-(4.1.5).

Если

$$rang(E - A) = rang(E - A,\quad f) = \kappa,\ \kappa < n, \qquad (4.1.7)$$

то решений задачи (4.1.1) бесконечно много и решения указанных оптимизационных задач (если только они существуют) могут не совпадать.

Если имеет место соотношение (4.1.6), то решение любой из рассмотренных выше оптимизационных задач можно принять за решение модели (4.1.1) (т.е. построение решения (4.1.1) можно свести к построению решения любой из указанных оптимизационных задач).

Если имеет место (4.1.7), то в этом случае допустимо рассматривать оптимизационные задачи на множестве решений (4.1.1). Решения задачи (4.1.1) и решения оптимизационных задач будут различными.

4.2 Оптимизационные задачи в рамках модели Леонтьева-Форда

Рассмотрим модель Леонтьева-Форда, описанную в подпункте 1.1.2 главы I:

$$\left.\begin{aligned} x &= A_{11}x + A_{12}y + b_1, \\ y &= A_{21}x + A_{22}y - b_2, \\ x &\ge \theta, \qquad y \ge \theta. \end{aligned}\right\} \qquad (4.2.1)$$

На множестве решений модели (4.2.1) поставим следующую оптимизационную задачу:

Найти

$$F_1(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i \to \max, \tag{4.2.2}$$

$$F_2(x)=\sum_{i=1}^{m} y_i \to \min \tag{4.2.3}$$

в предположении, что x, y удовлетворяют условиям (4.2.1). Здесь $\sum_{i=1}^{n} x_i$ представляет собой общий объем продукции, производимой всеми n отраслями, $\sum_{i=1}^{m} y_i$ – общий объем вредных отходов, образовавшихся в процессе производства.

Задача (4.2.2), (4.2.1) и (4.2.3), (4.2.1) представляет собой двухкритериальную задачу, которая может быть решена одним из способов свертки векторного критерия, например, линейной свертки.

4.3 Оптимизационная задача в рамках модели Леонтьева-Форда, учитывающей утилизацию вредных отходов

Экономико-математическая модель Леонтьева-Форда, учитывающая утилизацию вредных отходов производства, имеет вид [13] (см. так же главу I):

$$x=A_{11}x+A_{12}y+b_1-A_{13}y, \tag{4.3.1}$$

$$y=A_{21}x+A_{22}y-b_2+A_{23}y, \tag{4.3.2}$$

$$x\geq\theta, \quad y\geq\theta, \tag{4.3.3}$$

где $x\in R^n$ – вектор валового выпуска продукта, называемого полезным; R^n – n-мерное вещественное пространство;

$y\in R^m$ – вектор вредных отходов, выбрасываемых в окружающую среду, которые возникают в процессе производства и подлежат уничтожению с целью поддержания необходимого уровня экологического состояния окружающей среды;

$b_1\in R^n$ – вектор, характеризующий величину (объем) спроса на выпускаемый продукт;

$b_2\in R^m$ – вектор, характеризующий остаточный уровень вредных отходов, т.е. отходов, которые не могут быть ликвидированы;

A_{11} – технологическая матрица размера $n \times n$ (матрица прямых затрат);

A_{12} – матрица размера $n \times m$, характеризующая затраты при уничтожении вредных отходов;

A_{13} – матрица размера $n \times m$, характеризующая затраты при утилизации отходов;

A_{21} – матрица размера $m \times n$, характеризующая объем вредных отходов, получаемых при выпуске полезного продукта;

A_{22} – матрица размера $m \times m$, характеризующая объемы вновь получаемых вредных веществ при уничтожении старых;

A_{23} – матрица размера $m \times m$, характеризующая объемы вновь получаемых вредных веществ при утилизации старых.

θ – нулевой вектор (требуемой размерности: либо n, либо m).

Модель (4.3.1)-(4.3.3) обобщает известную модель Леонтьева, которая в наших обозначениях имеет вид [7]

$$x = A_{11}x + A_{12}y + b_1, \quad x \geq \theta$$

и призвана ответить на вопрос [13]: «… *можно ли в условиях данной технологии удовлетворить конечный спрос*?» Модель (4.3.1)-(4.3.2) призвана ответить на вопрос: можно ли в условиях данной технологии, учитывающей загрязнение окружающей среды вредными отходами производства и возможность утилизации вредных отходов, удовлетворить конечный спрос b_1 при заданном (допустимом) остаточном уровне вредных отходов b_2.

Модель (4.3.1)-(4.3.2) впервые появилась в работе [23] как результат обобщения известной модели Леонтьева-Форда [14]:

$$x = A_{11}x + A_{12}y + b_1,$$
$$y = A_{21}x + A_{22}y - b_2.$$

В рамках модели (4.3.1)-(4.3.3) ставится и изучается **задача:** *найти*

$$F_1(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \to \max, \tag{4.3.4}$$

$$F_2(y) = \sum_{i=1}^{m} y_i \to \min \tag{4.3.5}$$

в предположении, что $x \in R^n$, $y \in R^m$ *удовлетворяют условиям* (4.3.1)-(4.3.3).

Очевидно, в данной задаче $\sum_{i=1}^{n} x_i$ – общий объем продукции, производимой всеми n отраслями, $\sum_{i=1}^{m} y_i$ – это общий объем вредных отходов, возникающих в процессе производства и подлежащих утилизации.

4.4 Методы решения оптимизационных задач в рамках балансовых моделей

Все предложенные оптимизационные задачи: (4.1.2), (4.1.1); (4.1.3) (4.1.1); (4.1.5), (4.1.1) являются задачами линейного программирования. Их решения можно построить с помощью программы Microsoft Office Excel.

Допуская, что критерии (4.2.2) и (4.2.3), а также (4.3.4), и (4.3.5) в нашем случае равноправны и сворачивая $F_1(x)$ и $F_2(y)$ с помощью линейной свертки, получим критерий

$$F = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i \to \max . \tag{4.4.1}$$

Совокупность ограничений та же, что и в (4.2.2) (4.2.3). Она задается балансовыми соотношениями и неравенствами (4.2.1), (4.3.1)-(4.3.3) соответственно.

В общем случае поставленные задачи (4.2.2), (4.2.3), (4.2.1) и (4.3.4), (4.3.5), (4.3.1)-(4.3.3) представляют собой векторные (двухкритериальные) оптимизационные задачи с критерием

$$(F_1(x), \ -F_2(y)), \tag{4.4.2}$$

которой требуется максимизировать при ограничениях (4.2.1), (4.3.1)-(4.3.3) соответственно. Для решения подобных задач удобно прибегать к методам свертки векторных критериев.

1. Линейная свертка критерия (4.4.1). Вместо векторного критерия (4.4.1) можно рассмотреть скалярный $c_1 F_1(x) - c_2 F_2(y)$, $c_1 = const > 0$, $c_2 = const > 0$, $c_1 + c_2 = 1$, в котором c_1, c_2 задаются (определяются) экспертами. Тогда двухкритериальные задачи (4.2.2), (4.2.3), (4.2.1); (4.3.4), (4.3.5), (4.3.1)-(4.3.3) сводятся к задаче линейного программирования:

$$c_1 \sum_{i=1}^{n} x_i - c_2 \sum_{i=1}^{m} y_i \to \max \tag{4.4.3}$$

при ограничениях (4.2.1), (4.3.1)-(4.3.3) соответственно.

Данная задача может быть решена с помощью программы Microsoft Office Excel.

2. Квадратичная свертка критерев (4.4.2). Допускаем, что задачи: (4.2.2), (4.2.3), (4.2.1); (4.3.4), (4.3.1)-(4.3.3) и (4.3.5), (4.3.1)-(4.3.3), представляющие собой по отдельности задачи линейного программирования, имеют решения. Тогда для свертки критериев (4.4.2) можно предположить следующий метод.

1. Находим решение $\left(x^{(1)},\ \ y^{(1)}\right)=\left(x_1^{(1)},\ldots,x_n^{(1)},\ \ y_1^{(1)},\ldots,y_m^{(1)}\right)$ задач: (4.2.2), (4.2.3), (4.2.1); (4.3.4), (4.3.1)-(4.3.3).

2. Находим решение $\left(x^{(2)},\ \ y^{(2)}\right)=\left(x_1^{(2)},\ldots,x_n^{(2)},\ \ y_1^{(2)},\ldots,y_m^{(2)}\right)$ задач: (4.2.2), (4.2.3), (4.2.1); (4.3.5), (4.3.1)-(4.3.3).

3. Строим скалярный критерий

$$F(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-x_i^{(1)}\right)^2-\sum_{i=1}^{m}\left(y_i-y_i^{(2)}\right)^2. \qquad (4.4.4)$$

Тогда двухкритериальные задачи – (4.2.2), (4.2.3), (4.2.1); (4.3.4), (4.3.5), (4.3.1)-(4.3.3) – сводятся к задаче квадратичного программирования [8]:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-x_i^{(1)}\right)^2+\sum_{i=1}^{m}\left(y_i-y_i^{(2)}\right)^2\to\min \qquad (4.4.5)$$

при ограничениях (4.2.1) и (4.3.1)-(4.3.3) соответственно.

Задача квадратичного программирования (4.4.5), (4.3.1)-(4.3.3) может быть решена с помощью программы Microsoft Office Excel.

Полученные результаты использованы при анализе балансовых моделей различных субъектов экономики Карачаево-Черкесской республики.

4.5 Примеры применения оптимизационных задач

Пример 1. Оптимальное планирование валового выпуска продукции агропромышленного комплекса Министерства сельского хозяйства Карачаево-Черкесской республики

Построим решения оптимизационных задач (4.1.2), (4.1.1); (4.1.3), (4.1.1); (4.1.4), (4.1.1); (4.1.5), (4.1.1), сформулированных применительно к экономике агропромышленного комплекса Министерства сельского хозяйства Карачаево-Черкесской республики с помощью программы Microsoft Office Excel.

Согласно таблице 7, матрица продуктивности (2.1.7) имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0.166 & 0.097 & 0.454 & 0.003 \\ 0.001 & 0.54 & 0.13 & 0.04 \\ 0.001 & 0.004 & 0.08 & 0.001 \\ 0.025 & 0.024 & 0.033 & 0.326 \end{pmatrix}.$$

Пусть агропромышленный комплекс Министерства сельского хозяйства Карачаево-Черкесской республики запланировал конечный спрос: отрасли «растениеводство» – на сумму 97939.5 тыс. руб., отрасли «животноводство» – на 72236.4 тыс. руб. отрасли «промышленность» – на 498519.2 тыс. руб., отрасли «обслуживание» – на 68470.5 тыс. руб. (см. пример п. 2.1 главы II), т.е. вектор спроса имеет вид:

$$f = \begin{pmatrix} 97939.5 \\ 72236.4 \\ 498519.2 \\ 68470.5 \end{pmatrix}.$$

При указанных данных находим решение задачи (4.1.2), (4.1.1):

$$x = \begin{pmatrix} 450929 \\ 327626 \\ 541599 \\ 156499 \end{pmatrix},$$

значение целевой функции (4.1.2) в этом случае равно 1476651.15.

Находим решение задачи (4.1.5), (4.1.1), если экспертами заданы коэффициенты $c_1 = 0.2$, $c_2 = 0.4$, $c_2 = 0.3$ $c_2 = 0.1$:

$$x = \begin{pmatrix} 450929 \\ 327626 \\ 541599 \\ 156499 \end{pmatrix},$$

значение целевой функции (4.1.5) в данном случае равно 399365.6.

Сравнивая решения задач – (4.1.2), (4.1.1); (4.1.5), (4.1.1) убеждаемся (и это вполне естественно), что они совпадают.

Таким образом, агропромышленным комплексом Министерства сельского хозяйства должно быть произведено валовой продукции отрасли «растениеводство» – на сумму 450929 тыс. руб., отрасли «животноводство» – на сумму 327626 тыс. руб., отрасли «промышленность» – на сумму 541599 тыс. руб., отрасли «обслуживание» – на сумму 156499 тыс. руб.

Пример 2. Оптимальное планирование валового выпуска продукции агропромышленного комплекса СХА (колхоз) «Кубань»

Построим решения оптимизационных задач (4.1.2), (4.1.1); (4.1.3), (4.1.1); (4.1.4), (4.1.1); (4.1.5), (4.1.1), сформулированных применительно к экономике агропромышленного комплекса СХА (колхоз) «Кубань» Прикубанского района Карачаево-Черкесской Республики с помощью программы Microsoft Office Excel.

Из пункта 2.2 главы II имеем матрицу затрат:

$$A = \begin{pmatrix} 0.159 & 0.002 \\ 0.0004 & 0.222 \end{pmatrix}.$$

Пусть агропромышленный комплекс СХА (колхоз) «Кубань» Прикубанского района Карачаево-Черкесской Республики запланировало конечный спрос: на 25448 тыс. руб. – продукции отрасли «растениеводство», на 16842 тыс. руб. – отрасли «животноводство», т.е. вектор спроса

$$f = \begin{pmatrix} 25448 \\ 16842 \end{pmatrix}.$$

Находим решение задачи (4.1.2), (4.1.1) при указанных плановых поставках

$$x = \begin{pmatrix} 30311 \\ 21663 \end{pmatrix},$$

значение целевой функции (4.1.2) в этом случае равно 51974.

Находим решение задачи (4.1.5), (4.1.1), если экспертами заданы коэффициенты $c_1 = 0.3$, $c_2 = 0.7$:

$$x = \begin{pmatrix} 30311 \\ 21663 \end{pmatrix},$$

значение целевой функции (4.1.5) в данном случае равно 24258.

Сравнивая решения задач – (4.1.2), (4.1.1); (4.1.5), (4.1.1) – убеждаемся (и это вполне естественно), что они совпадают.

Таким образом, агропромышленный комплекс СХА (колхоз) «Кубань» Прикубанского района Карачаево-Черкесской Республики должен произвести валовой продукции: отрасли «растениеводство» – на сумму 30311 тыс. руб., отрасли «животноводство» – на сумму 21663 тыс. руб.

Пример 3. Оптимальное планирование валового выпуска продукции ООО «Фактор»

Построим решения оптимизационных задач (4.2.4)-(4.2.1), сформулированных применительно к экономике ООО «Фактор» с помощью программы Microsoft Office Excel.

Согласно (2.3.1) имеем матрицы:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0.32 & 0.07 \\ 0.01 & 0.1 \end{pmatrix},\ A_{12} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix},\ A_{21} = \begin{pmatrix} 0.001 & 0.01 \end{pmatrix},\ A_{22} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть ООО «Фактор» запланировало конечный спрос (см. п. 2.3.): цеха по производству «лакокрасочных изделий» – на сумму 42336 тыс. руб., цеха по производству «емкостей для краски» – на сумму 5695.2 тыс. руб. Остаточный уровень вредных отходов, остающихся в природе, считается равным нулю. Тогда вектор, характеризующий чистый выпуск полезного продукта, соответственно равен:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 42336 \\ 5695.2 \end{pmatrix},$$

вектор, характеризующий остаточный уровень вредных отходов, соответственно равен:

$$b_2 = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}.$$

При указанных данных находим решение задачи (4.2.4), (4.2.1):

$$x = \begin{pmatrix} 63035.9 \\ 6454.7 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} 127.6 \end{pmatrix},$$

значение целевой функции в этом случае равно 69363.

Таким образом, ООО «Фактор» должен произвести продукцию на сумму 63035.9 тыс. руб. – цех по производству «лакокрасочных изделий»; на сумму 6454.7 тыс. руб. – цех по производству «емкостей для краски». При этом затраты, требуемые для уничтожения вредных отходов должны составить 127.6 тыс. руб.

В целях оптимального планирования производства ООО «Фактор», используя данные из п. 3.4 главы III, такие как

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0.32 & 0.07 \\ 0.02 & 0.1 \end{pmatrix},\ A_{12} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 0.001 & 0.01 \end{pmatrix},\ A_{22} = (0),$$
$$A_{13} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.006 \end{pmatrix},\ A_{23} = (0.03),$$
$$b_1 = \begin{pmatrix} 30240 \\ 4039 \end{pmatrix},\ b_2 = 0.$$

найдём решение задач: (4.4.1), (4.3.1)-(4.3.3); (4.4.1), (4.3.1)-(4.3.3); (4.4.4), (4.3.1)-(4.3.3), с помощью программы Microsoft Office Excel: находим решение задачи (4.4.1), (4.3.1)-(4.3.3)

$$x = \begin{pmatrix} 45024.1 \\ 4578.8 \end{pmatrix},\ y = (93.6),$$

значение целевой функции (4.4.2) равно 49509.27;
находим решение задачи (4.4.1), (4.3.1)-(4.3.3), если экспертами заданы коэффициенты $c_1 = 0.9$, $c_2 = 0.1$

$$x = \begin{pmatrix} 45024.1 \\ 4578.8 \end{pmatrix},\ y = (93.6),$$

значение целевой функции (4.4.2) в этом случае равно 44633.24;
находим решение задачи (4.4.4), (4.2.1)-(4.3.3)

$$x = \begin{pmatrix} 45024.1 \\ 4578.8 \end{pmatrix},\ y = (93.6),$$

значение целевой функции (4.4.4) в данном случае равно 5.29876E-07.

Сравнивая решения задач: (4.4.1), (4.3.1)-(4.3.3); (4.4.1), (4.3.1)-(4.3.3); (4.4.4), (4.3.1)-(4.3.3), убеждаемся (и это вполне естественно), что они совпадают.

Таким образом, ООО «Фактор» должен произвести валовой выпуск продукции на сумму 45024.1 тыс. руб. – цех по производству «лакокрасочных изделий», на сумму 4578.8 тыс. руб. – цех по производству «емкостей для краски». Затраты, требуемые для уничтожения вредных отходов, составят 93.6 тыс. руб.

В четвертой главе исследованы оптимизационные задачи в рамках экономико-математических балансовых моделей: Леонтьева, модели, Леонтьева-Форда, Леонтьева-Форда, учитывающей утилизацию вредных отходов производства. Приведены примеры анализа балансовых моделей отраслей экономики Карачаево-Черкесской республики и некоторых его субъектов: ООО «Фактор» г. Черкесска, СХА (колхоз) «Кубань» Прикубанского района.

В рамках модели Леонтьева поставлены и исследованы задачи максимизации общего объема производственной продукции, максимизации объема выпуска производственной продукции одной или нескольких отраслей, максимизации объема выпуска производственной продукции нескольких отраслей с учетом предпочтительности. Приведены примеры использования полученных результатов анализа балансовых моделей отраслей экономики Карачаево-Черкесской республики и некоторых ее субъектов.

Таким образом, применение результатов исследования оптимизационных задач в рамках экономико-математических балансовых моделей для анализа балансовых моделей экономических субъектов Карачаево-Черкесской республики и некоторых ее субъектов позволяет выбрать наиболее эффективное решение производственных задач.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие оптимизационные задачи исследуются в рамках модели Леонтьева?
2. Какие оптимизационные задачи исследуются в рамках модели Леонтьева-Форда?
3. Какие оптимизационные задачи исследуются в рамках модели Леонтьева-Форда, учитывающей утилизацию вредных отходов?
4. Приведите методы решения оптимизационных задач в рамках балансовых моделей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебном пособии приведено подробное описание экономико-математических балансовых моделей (Леонтьева, Леонтьева-Форда, Леонтьева-Форда, учитывающей утилизацию вредных отходов). Также приведены критерии продуктивности (существования неотрицательного решения) этих моделей и основные сведения из математического программирования, линейной алгебры. Все эти вопросы изложены в первой главе. Во второй главе приведены балансовые модели двух- и четырехотраслевой экономики Карачаево-Черкесской республики: агропромышленного комплекса Министерства сельского хозяйства, агропромышленного комплекса СХА (колхоз) «Кубань» Прикубанского района, ООО «Фактор» г. Черкесска. Подробно описан анализ этих моделей. В третьей главе пособия приведены разные методики анализа и численного решения балансовых моделей (Леонтьева, Леонтьева-Форда, Леонтьева-Форда, учитывающей утилизацию вредных отходов), основанные на известных результатах исследования систем линейных алгебраических уравнений методом простой итерации, позволяющие найти существование и единственность неотрицательного решения в этих моделях и выяснить, устойчиво ли это решение относительно начальных условий. Применение этой методики позволит хозяйствующим субъектам качественно и быстро принимать управленческие решения по объему выпуска продукта каждой отрасли экономики.

В пособии приведена технология анализа и построения методами простой итерации неотрицательного решения плохо обусловленных балансовых моделей (Леонтьева, Леонтьева-Форда, Леонтьева-Форда, учитывающей утилизацию вредных отходов), основанная на известных результатах исследования плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений методом регуляризации (по Тихонову). Применение этой методики позволит хозяйствующим субъектам качественно и быстро принимать управленческие решения по объему выпуска продукта каждой отрасли экономики в случае, если его балансовая модель является плохо обусловленной.

Студентам будут полезны и примеры использования разработанных на основе предложенных методик программных продуктов для подробного анализа многоотраслевой экономики Карачаево-Черкесской республики, а также оптимизационные задачи в рамках экономико-математических балансовых моделей Леонтьева, Леонтьева-Форда Леонтьева-Форда, учитывающей утилизацию вредных отходов производства. Они позволят построить такие решения указанных моделей, которые 1) максимизируют валовый выпуск продукции (или его стоимость) либо 2) одновременно максимизирует валовый выпуск продукции (или его стоимость) и минимизируют общий объем (или минимизирует его стоимость) вредных отходов, возникающих в процессе производства. Для максимизации и минимизации указанных величин предлагается использовать линейные критерии. В первом случае приходим к задаче линейного программирования, во втором – к двухкритериальной задаче, которая решалась методом свертки критериев. Данную методику хозяйствующие субъекты могут применить для оптимального планирования производства.

Надеемся, что данное пособие существенно облегчит работу преподавателя и поможет студентам при освоении дисциплин «Моделирование экономических процессов» и «Экономико-математические методы и модели» учебного плана направления подготовки 09.03.03 «Прикладная информатика» (профиль "Прикладная информатика в экономике").

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Агальцов В.П., Волдайская И.В. Математические методы в программировании: Учебник. – М.: ИД «ФОРУМ»: ИНФРА-М., 2006. – 224 с.
2. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров: Учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 1994. – 544 с.
3. Ашманов С.А. Линейное программирование. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 340 с.
4. Браславец М.Е., Кравченко Р.Г. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве. – М.: Колос, 1972. – 588 с.
5. Галкина В.А., Омарова А.Д. Еще раз о существовании неотрицательного решения у модели Леонтьева-Форда. Серия «Физико-химическая», выпуск 6 – С. 74.
6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
7. Изард У. Методы регионального анализа: введение в науку о регионах. – М.: Прогресс, 1966. – 659 с.
8. Ильченко А.Н. Экономико-математические методы: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2006. – 288 с.
9. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. – М.: Мир, 1964. – 838 с.
10. Крищенко А.П., Канатников А. Н. Линейная алгебра. Учебник для ВУЗов. Серия "Математика в техническом университете". Издательство: МГТУ им. Н.Э. БАУМАНА, ИЗДАТЕЛЬСТВО, 2006. – 335 с.
11. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Валощенко А.Б. Математическое программирование. – М.: Высш. школа, 1976. – 352 с.
12. Кундышева Е.С. Математическое моделирование в экономике: Учебное пособие. – 2-е изд., перераб. и исп. / Под науч. Ред. Проф. Б.А. Суслакова. – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2006. – 352 с.
13. Куркалова Л.А. Неразложимые модели Неймана и Леонтьева: Дисс. канд. Физ.-мат. наук. – Душанбе, 1990. – 131 с.
14. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Издательство «Наука», 1968. – 432 с.

15. Курс математической экономики: Учеб. Пособие / Н.Н. Данилов. – М.: Высш.шк., 2006. – 407 с.
16. Леонтьев В., Форд Д. Межотраслевой анализ воздействия структуры экономики на окружающую среду, Экономика и математические методы, т. VIII, 1972, вып. 3, – С. 370 – 399.
17. Леонтьев В., Форд Д. Экономика и математические методы. – М.: Наука, 1972. – 242 с.
18. Леонтьев В.В. Исследование структуры американской экономики. – М.: Госстатиздат, 1958. – 480 с.
19. Леонтьев В.В. Межотраслевая экономика: Пер. с англ./Автор предусл. и науч. ред. А.Г. Гранберг. – М.: ОАО «Издательство «Экономика», 1997. – 479 с.
20. Лотов А.В. Введение в экономико-математическое моделирование. – М.: Наука, 1984. – 391 с.
21. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. – М.: Наука, 1981. – 488 с.
22. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. – М.: Мир, 1972. – 518 с.
23. Общий курс высшей математики для экономистов: Учебник / Под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2006. – 656 с.
24. Овчаренко Е.К., Ильино О.П., Балыбердин Е.В., Финансово-экономические расчеты в Excel. Изд. 3-е перер. и доп. – М.: Изд. дом «Филинъ», 1999. – 328 с.
25. Орехов Н.А., Лёвин А.Г., Горбунов Е.А. Математические методы и модели в экономике. – М.: Юнити, 2004. – 302 с.
26. Основы теории оптимального управления. Под ред. В.Ф. Кротова. – М.: – Высш. шк., 1990. – 430 с.
27. Основы численных методов: Учебник для вузов/Вержбицкий В.М. – М.: – Высш. шк., 2002. – 840 с.
28. Просветов Г.И. Математические методы в экономике: Учебное пособие. – М.: Издательство РДЛ, 2004. – 160 с.
29. Региональная Экономика / Тяголов С.Г., Черныш Е.А., Молчанова Н.П., Черненко О.Б., Новикова А.А., Левицкая Н.А., Молчанов И.Н., Салтанова Т.А. / Под ред. Профессора Н.Г. Кузнецова и профессора С.Г. Тяглова. Серия «Учебники и учебные пособия», Ростов н/Д: «Феникс», 2003. – 320 с.
30. Савкин Д.А. Математические методы в экономике: Учебное пособие Калининград: Изд-во RUE, 2001. – 85 с..

31. Системный анализ. Учеб. для вузов / А.В. Антонов. – М.: Высш. шк., 2004. – 454 с.
32. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. Учебное пособие для вузов. Изд. 3-е, исправленное. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 288 с.
33. Фадеев Д.К., Фадеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. – М.: Физматгиз, 1963. – 354 с.
34. Формы отчетности о финансово-экономическом состоянии товаропроизводителей агропромышленного комплекса за 2007 год. Министерство сельского хозяйства Карачаево-Черкесской Республики. Сводная бухгалтерская отчетность обслуживающих и прочих предприятий за 2007 год – 52 с.
35. Численные методы / Н.С. Бахвалов., Н.П. Жидков, Г.Н. Кобельков. –5-е изд. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2007. – 636 с.
36. Шабан М. Обобщенная норма интегральных операторов и матриц // Изв. АН Тадж. ССР. – 1998. – Т. 108, № 2. – С. 3-12.
37. Шеремет А.Д. Теория Экономического анализа: Учебник 2-е изд., доп. – М.: ИНФРА – М., 2005. – 366 с.
38. Экономико-математические методы и модели (микроэкономика) / К.А. Багриновский, В.М. Матюшок. – М.: Российский университет дружбы народов, 1999. – 183 с.
39. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб. пособие для вузов / В.В. Федосеев, А.Н. Гармаш, Д.М. Дайитбегов и др.; под ред. В.В. Федосеева. – М.: ЮНИТИ, 2002. – 391 с.
40. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: Учеб. для вузов / Я.С. Бугров, С.М. Никольский 3-е изд., испр. и доп. – М.: Наука, 1988. – 224 с.
41. Элементы численных методов: Учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. Заведений / В.Н. Исаков. – М.: Издательский центр «Академия», 2003. – 192 с.

Для заметок

Для заметок

Асхакова Фатима Хызыровна

Экономико-математические методы и балансовые модели

Учебное пособие

Редактор Н.В. Ефрюкова
Корректор Л.У. Семенова
Компьютерная верстка С.А. Бостанова

Подписано в печать 14.07.2016 г.
Бумага офисная
Формат 60х84/16
Объем 16,8 п.л.
Тираж 200 экз.

Издательство Карачаево-Черкесского государственного университета: 369202, г. Карачаевск, ул. Ленина, 29
Лицензия Л Р № 040310 от 21.10.1997

Отпечатано в типографии Карачаево-Черкесского государственного университета: 369202, Карачаевск, ул. Ленина, 46